1979年度

国際基督教大学高等学校入学考査問題

数　学

注　意

1. これから読む資料文のなかには，初めて聞く言葉がでてくるかもしれません。けれども，それは心配しなくてもよいです。資料文を注意深く読めば，知らない言葉でも，それが何を表すか，はっきりわかるように書かれてあるからです。

資料文を読みながら，配られた紙の上で内容を整理してみるとよいでしょう。文章のあとに問題が10問だされています。問題のまえに書かれている指示にしたがって解答して下さい。

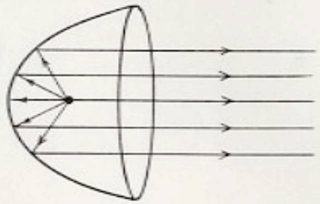
2. この考査時間は，10時40分から11時50分までの70分間です。

3. その他の要領は，国語の考査と同様です。

考査番号		氏名	

資　料　文

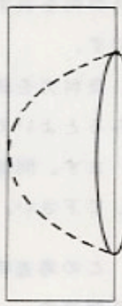
A君は中学3年の冬休みに，お父さんから下の図に示すような自動車のヘッドライトの反射鏡をもらった。そして，お父さんは反射鏡のなかのある位置におかれた光源から出る光が，反射鏡で反射されたのち，平行光線となって外に出るので，ヘッドライトの光は遠くまで届くのだと教えてくれた。その話を聞いて，A君は　光はもと来た道すじを逆にたどることを知っていたので，



平行光線が反射鏡で反射されると1点に集まる

のではないかと思った。

そこで，A君は　この反射鏡がもっている曲面自身の性質に興味をもったので，この曲面の性質をさらにくわしく調べるために，図をかいてみることにした。まず，右の図のように，反射鏡を2等分するような垂直平面で切ったときの断面図で見るのが，もっともよいと思ったので，反射鏡の曲面が正確に描かれるように，注意深く断面図をかいてみた。それが図Aで，この曲線が反射鏡の曲面の切り口をあらわしている。

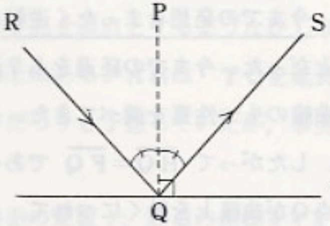


ところで，A君は，光の反射についてつぎのことを習って知っていた。

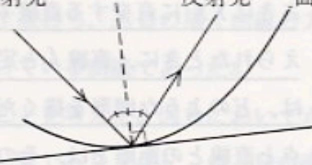
光は反射するとき，その入射角と反射角とが等しくなるように反射する。

ここで，入射角，反射角というのは，平面鏡に垂直な直線を立てたとき，入射した光と反射した光が，それぞれその直線に対してなす角のことである。次ページ上の図でいえば，∠PQRが入射角，∠PQSが反射角である。もちろん，入射光線と反射光線が平面鏡となす角が等しい　といってもよい。では，曲面の場合には，それをどのように考えたらよいだろうか。その場合には，曲面上の1点をとって，そ

の点でこの曲面に接するような平面（それを接平面とよぶ）を考えることにすれば，平面鏡のときと，まったく同じように扱うことができる。それを断面図で示せば右下の図のようになる。



さて，図Aをもう一度見てみよう。直線XX′は曲線の対称軸で，水平になるように引いたものである。R → Q → F は光の進む方向を表し，直線RQは対称軸XX′に平行に引いてある。点Fはすべての光が集まる点で，この反射鏡の焦点という。直線TT′は，点Qにおける接平面の切り口であるから，この断面図では曲線の点Qにおける接線になっている。



A君は　この図にさらに何本かの補助線を引いて，考察するうちに，2つの興味ある事実に気がついた。1つは，直線RQをそのまま延長した直線と，点Tから直線FQに平行に引いた直線とが交わる点をHとすれば，

四辺形HTFQはひし形になる

ということである。

ところで，光はRQの道すじだけを通って来るわけではなく，点Q以外の曲線上の点にも光は当たるから，その場合にも，まったく同じことがいえるはずである。そこで，点Qを曲線にそって動かせば，接線TT′も変わるから，それにつれて，四辺形HTFQの頂点Hも動いて，ある図形を描くことになる。A君の気がついた第2の事実は，そのとき，

点Hが描く図形は1本の直線であり，しかもその直線をℓとすれば，ℓはXX′に直交する

ということであった。

ここで，Ａ君は　すばらしいことを思いつく。それは

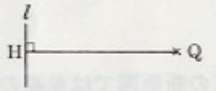
今までの発想をまったく逆転させてみよう

ということだった。今までの経過をふり返ってみると，さきに１つの曲線があって，その曲線のもつ性質を調べてきた。その結果，四辺形ＨＴＦＱはつねにひし形になり，したがって $\overline{HQ}=\overline{FQ}$ である。（ここで，$\overline{HQ}$は線分ＨＱの長さを表す）　点Ｑが曲線上を動くにつれて，点Ｈは　ＸＸ'に直交する直線を描くことがわかった。

それでは，発想を逆にして，

さきにＸＸ'に直交する直線 l と，ＸＸ'上の定点（動かない点）Ｆが与えられたときに，直線 l と定点Ｆからの距離が等しくなるような点Ｑは，どのような図形を描くだろうか

（注；　１点と直線との距離とは，その点から直線におろした垂線の長さのこと。



このとき $\overline{HQ}$ を点Ｑと直線 l との距離という。）

そのとき点Ｑが描く図形こそ，図Ａの曲線にちがいないのではないか

そのようにＡ君は考えた。

実際，Ａ君のこの考えは正しい。

そこで，Ａ君は　その曲線をグラフとして表現できないものかと，くふうしてみた。まず，水平な直線を引き，その上に定点Ｆを定める。つぎにその直線に直交する直線 l を引く。ただし，l と水平な直線との交点をH_0とするとき，FH_0の長さを図Ａのものと同じになるようにとる。H_0とＦとの中点をＯとすれば，点Ｏは　直線 l と定点Ｆから等距離にある点だから，Ｑは点Ｏを通るはずである。このようにして，定直線 l と定点Ｆから，等距離にあるような点Ｑの描く曲線Ｃをかくことができる。ところで，座標軸は都合のよいように入れればよいので，Ａ君は　はじめに引いた水平な直線を x 軸にとり，点Ｏを通って x 軸に垂直な直線を y 軸にとってみた。こうして，この平面にＯを原点とする直交座標が入ったわけである。図Ｂの曲線は，以上のようにしてかかれたものである。図Ｂにおいて，

定点Ｆを曲線Ｃの焦点，定直線 l をＣの準線とよぶ。

ところで，図Ｂにおいて，Ｈ，Ｑ，Ｆの３点を頂点とするようなひし形の，残りの頂点をＴとすれば，もちろん点Ｔは x 軸上にある。Ａ君は　ＴＱを延長した直線ＴＴ'は，曲線Ｃの点Ｑにおける接線になるだろうと予想していたが，事実，そうであった。

さて，焦点Ｆの座標を（p，０）（pは正の定数），点Ｑの座標を（X，Y）（X，Yは変数）としよう。そうすれば，点Ｈの座標が決まるから，準線 l の方程式が求められる。また，条件 $\overline{HQ}=\overline{FQ}$ によって，Ｑの x 座標Xと，y座標Yの間に一定の関係が成立することがわかる。すなわち，点Ｑの描く曲線の方程式が求められる。それは，意外にもＡ君がよく知っている曲線であった。

ところで，Ａ君は　さらにつぎのようなことを考えた。図Ｂにおいて点ＱがＯにある場合をのぞけば，四辺形ＨＴＦＱはひし形であり，点Ｆ，Ｑ，Ｈの座標がわかっているから，点Ｑにおける接線ＴＴ'の方程式が求められるはずである。それを，$y=ax+b$　とおこう。そうすれば，点Ｑが曲線Ｃの上を動くにつれて，それぞれの点での接線の方向が変わるから，その方程式　$y=ax+b$　におけるaとbの値も変化する。いいかえれば，点Ｑの座標（X，Y）が変化するにつれて，aとbの値も変わる。ところが，Ａ君は，aとbの値は自由に変化するのではなく，ある一定の関係を保ちながら，変化することに気がついた。実際に，a，bの値を求めてみたところ，

a，bはともに，pとYを用いて表される‥‥‥‥‥‥‥‥（Ｉ）

ことがわかった。ここで，pは定数だから問題ないとして，Yの方は，点Ｑのy座標だから，正の数から負の数まで自由に動くことができる。

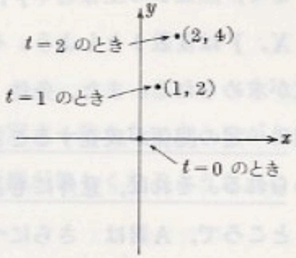
いま，xをよこ軸に，yをたて軸にとった座標平面で，点（x，y）の描く曲線を考えるとき，

xとyの関係が，たとえば　$y=2x$　のように
直接決められていれば，

それは，原点を通る，傾き２の直線を表すことがすぐにわかる。ところが，xとyの間に，

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \quad （t\text{ は，正の数から負の数まで自由に動く}）\text{-----(II)}$$

という関係が与えられたとき，x と y の値は，t が変化すれば変わるが，点（x, y）の描く図形は，やはり $y = 2x$ という直線にかわりない。なぜならば，まず，具体的に $t = 0$，1，2，・・・・・と いくつかの値を入れてみると，点（x, y）は，直線 $y = 2x$ の上にあるらしいことが推測される。これは，推測にすぎないので，実際にはつぎのようにして求める。(II)において，$t = x$ だから，これを下の式に入れて，t を消してしまえば，$y = 2x$ という式が得られる。



つまり(II)は，

<u>$y = 2x$ という直線上の点（x, y）の関係を，t という変数を間にはさんで，間接的に表現しているにすぎない。</u>

このような変数 t のことを，パラメータ（助変数）とよぶ。曲線あるいは直線が，パラメータ表示されているときは，そのパラメータを消去してしまえば，いつでも x と y の間の直接の関係式がえられることになる。

この例からわかるように，下線（I）の意味は，

<u>点（a, b）の描く曲線が，点Qの y 座標 Y をパラメータとして表される</u>

ということである。そして，点（a, b）が描く図形も，A君のよく知っているものであった。

こうして，A君は お父さんからもらった反射鏡をきっかけにして，1つの曲線がもつ，興味深い性質を学んだ。

指　示

以上の資料文をよく読み，理解した上で，つぎの問1から問10に，資料の内容にもとづいて答えなさい。

解答は，問題に指示されたとおりに解答用紙に答えなさい。

問　題

問1.（i）入射角，反射角の説明から図Aにおいてどの角とどの角が等しいか。
（図Aにある記号で答えなさい。）

（ii）図Aにおいて四辺形HTFQがひし形になることを証明しなさい。

問2. 資料文の3ページ16行目の下線を引いた部分について，つぎの問いに答えなさい。
A君のこの考えが正しい理由として次のうち，最も適切なものを1つだけ選びなさい。図Aおよび図Bの曲線がどのような手順にしたがってかかれたかに十分注意しなさい。

(a) 図Bにおいて ℓ 上にかってな点Hをとったとき，HとFからの距離が等しい点をQとする。ただし，$HQ \perp \ell$ である。
また，x 軸上の点Tを $\overline{FQ} = \overline{FT}$ となるようにとり，T，Qを結ぶ直線をQの方向に延長してTT'とする。このときHQをQの方向に延長した直線をHRとすれば，$\angle T'QR = \angle TQF$ になるから。

(b) 図Aにおいて，四辺形HTFQがひし形になるということは，△HQFが二等辺三角形になることである。ところで，逆に図Bにおいて，直線 ℓ 上に点Hをとったとき，HとFからの距離が等しい点をQ'（ただし，$HQ' \perp \ell$）とすると，△HQ'Fも二等辺三角形になるから。

(c) 図Bにおいて直線 l 上にかってな点Hをとったとき，$\overline{HQ}=\overline{QF}$　かつ HQは x 軸に平行だから，H，Q，Fを3つの頂点とするひし形の残りの頂点TはXX'上にあるから。

(d) 図Bにおいて曲線C上にかってな点Qをとり，Qにおける接線を引き，x 軸との交点をTとし，TQをQの方向に延長した直線をTT'とする。また点Qを通り x 軸に平行な直線HRを引く。ただし，Hは l 上の点である。このとき，∠T'QR＝∠HQT　になるから。

(e) 発想を逆にしただけだから。

問3. 図Bにおいて点Hの座標を求めなさい。

問4. 図Bにおいて点Qが描く曲線の方程式を求めなさい。ただし，答えは $Y^2=\boxed{}$ の形にしなさい。

問5. 問4で求めた式から　X と Y を入れかえて考えてみることにより，この曲線は何と呼ばれるか答えなさい。

問6. つぎの $\boxed{}$ をうめなさい。（ただし，途中の経過は書かなくてよい）

点Q（ただし，Qが原点にある場合は除く）におけるCの接線TT'の方程式を　$y=ax+b$　としたとき，この a，b を Y をパラメータとして表してみよう。

まず，図Bにおいて　$X>0$，$p>0$　だから

$\overline{HQ}=\boxed{(\mathrm{i})}$

四辺形HTFQはひし形だから　$\overline{TF}=\boxed{(\mathrm{ii})}$

また，$\overline{OF}=p$　だから，Tの座標は $\boxed{(\mathrm{iii})}$

したがって　直線TT'は点Tと点Qを通るから

$a=\boxed{(\mathrm{iv})}$

ところで　問4の結果より　a を p と Y で表すと

$a=\boxed{(\mathrm{v})}$

となる。また，b はTT'の切片だから

$b=\boxed{(\mathrm{vi})}$

である。

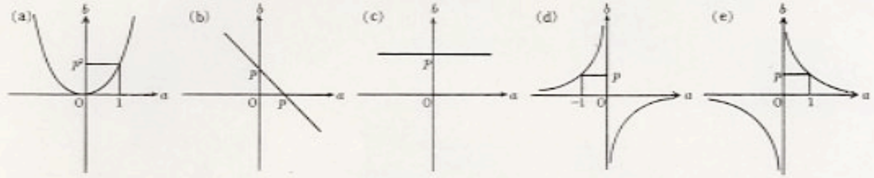
問7. 点（x，y）の座標が

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \end{cases}$$　（t は正の数から負の数まで自由に動く）

で与えられたとき，x，y の関係式を求め，そのグラフをかきなさい。

問8. 問6の結果からパラメータを消去し，a，b の間の関係式を求めなさい。

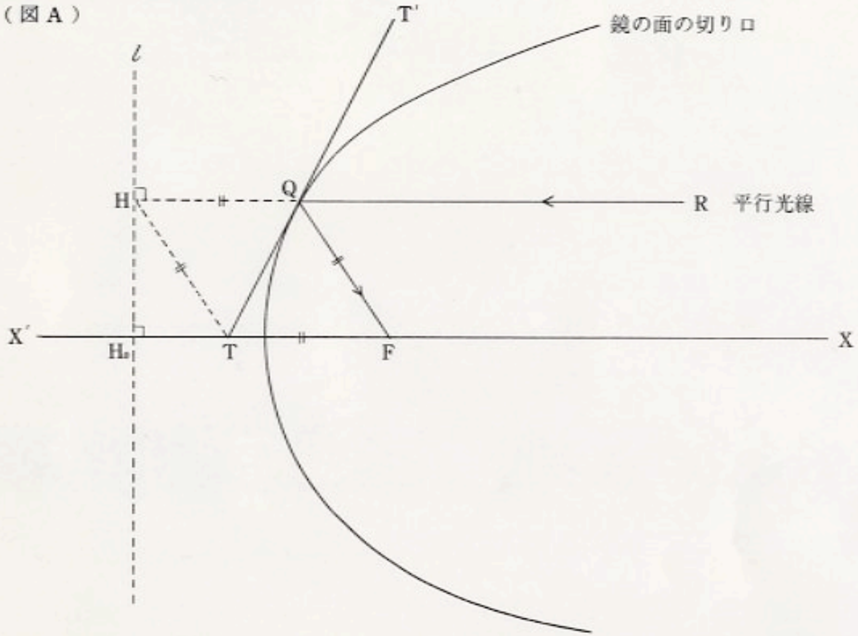
問9. 問8で求めた式から点（a，b）の描くグラフはどれか。つぎの (a)～(e) の中から正しいものを選び，その記号を○でかこみなさい。また，点Qが図Bの曲線Cにそって y 座標　正から負の方向へ動くとき，点（a，b）はどのように動くか，選んだグラフ内に矢印を書き込んで動きを示しなさい。



問10. (i)　$y=x^2$ の焦点の座標と準線の方程式を求めなさい。

(ii) これによって，曲線 $y=x^2$ はどのような特徴をもった曲線であるといえるか答えなさい。

（図A）



（図B）