1980年度

国際基督教大学高等学校入学考査問題

（一 般 生 徒 用）

数 学

G

注 意

1. これから読む資料文のなかには，初めて聞く言葉がでてくるかもしれませんが，それは心配ありません。資料文を注意深く読めば，知らない言葉でも，それが何を表すか，はっきりわかるように書かれてあるからです。
   資料文を読みながら，配られた紙の上で内容を整理してみるとよいでしょう。文章のあとに問題が12問だされています。問題のまえに書かれている指示にしたがって解答して下さい。

2. この考査時間は，10時40分から11時50分までの70分間です。

3. その他の要領は，国語の考査と同様です。

考査番号	G	氏名	

資 料 文

次の文は，中学２年生のＳ君と，数学のＴ先生との対話です。

Ｓ； わたしたちが，数を数えるときや，計算するとき，日常用いている１０進法は，人間の指の数が１０本であるところからきたものであって，もし人間の指の数が，ある動物のように４本ずつであったら，８進法になっていただろう，という話を聞いたことがあるのですが，これはどういうことなんですか。

Ｔ； それは，１０ずつ数えて一まとめにするという１０進法は偶然であって，数の本質ではない，ということなんだ。たとえば，野球のトーナメントで組み合せをつくるとき，２チームずつの組み合せだから，コンピューターなどで用いられているように，２ずつ数えて一まとめにする２進法の方が，１０進法よりも考えやすいね。また，わたしたちが数を用いるとき，１の位の数が２の倍数や，５の倍数のときは，その数は，それぞれ２や５で割り切れる，ということを知っているし，さらに２，４，６，８，……と２つずつ数えたり，５，１０，１５，２０，………と５つずつ数えることも，数を楽に数える方法だね。このことは，２や５が１０の約数であることからきている。このように考えると，一まとめにする数が，なるべく約数の多い数の方が便利であることがわかる。そうすると，１０進法より１２進法の方がすぐれているといえるだろうね。

２進法でも１０進法でも１２進法でも，かわらないのは，一まとめにする数をきめて，それをくり返す，ということだ。この“くり返す”ということによって，新しい記号をたくさん作りださなくても，１の位，１０の位，１００の位，１０００の位，……といくらでも大きい数を限られたいくつかの記号（数字）だけで表すことができるわけだ。

Ｓ； その通りですね。慣れのせいで１０進法が一番良いと思っているのかも知れませんね。１０進法は，１０ずつ数えて一まとめにし，それをくり返すことですし，２進法や１２進法では，一まとめにする数が，それぞれ２や１２になる，というだけのことですね。

Ｔ； そうだよ。何進法でもその構造は同じだ。そこで，たとえば，７進法を例に

とって，使い慣れている10進法と比べながら，考えていくことにしよう。

10進法の　1632は，

$1632=1\times1000+6\times100+3\times10+2\times1$

$=1\times10^3+6\times10^2+3\times10+2\times1$ ……………… ①

のことである。そこで，

7進法の　1632は，

$1632=1\times7^3+6\times7^2+3\times7+2\times1$ ……………… ②

のことである，と考えよう。ここで注意しなくてはいけないのは，10進法の1632と7進法の1632とは，同じ数を表していないということだ。

さて，7進法は，7が一まとめになる数だから，1が7個で10（**イチ・ゼロ**と読む）になるわけだ。なぜ，「イチ・ゼロ」と読むかというと，それは10進法の「ジュウ」と区別するためだ。10進法は，10が一まとめになる数だから，1がちょうど10個で10（イチ・ゼロ）になる。10進法では「ジュウ」と「イチ・ゼロ」が同じになってしまうが，この区別がわかると，10進法の構造が，はっきりしてくる。

ところで，7進法では1が7個で10（イチ・ゼロ），10が7個で100（イチ・ゼロ・ゼロ）になり，100が7個で1000（イチ・ゼロ・ゼロ・ゼロ），……と，位が上がっていくね。

また，7進法でも，

$100=10^2$，$1000=10^3$，$10000=10^4$，……

と，10進法の場合と同じようにかける。それは，7進法の100は10進法の7×7のことであり，7進法でいえば10×10である。10が2つかけあわされているのだから，$10\times10=10^2$　とかいてもよい。つまり$100=10^2$となる。$1000=10^3$，$10000=10^4$，…… についても同じように考えられる。また，7進法の100は，10進法の7×7，つまり7^2のことである。そして1000は7^3，10000は7^4……　である。このように考えると，②は，

$1632=1\times7^3+6\times7^2+3\times7+2\times1$

$\rightarrow1632=1\times1000+6\times100+3\times10+2\times1$

$=1\times10^3+6\times10^2+3\times10+2\times1$ ……… ③

となって，その構造は，①とまったく同じということになる。

ここにいたって，実は，①の式が②の意味と③の意味の両方を表現しているのだ，ということが，はじめてわかるというわけだ。つまり，①式の10は，②式の意味では「ジュウ」ということだし，③式の意味では「イチ・ゼロ」ということになる。

S；　なるほど。何進法であっても，つねに，

$1632=1\times10^3+6\times10^2+3\times10+2\times1$

とかけるが，もし，この式を7進法とみれば，10は10進法の7のことだし，また，12進法とみれば，10は10進法の12のこと，というわけですね。何進法でも構造は同じ，ということが実感をもってわかりました。

T；　それは，よかった。ところで，構造が同じということは，数が同じということとは，全然違うことだ。わかるね。

S；　はい，7進法の1632は，②の式から $1\times7^3+6\times7^2+3\times7+2\times1=660$ と計算できて，10進法の660のことです。だから，10進法の1632とは違います。

T；　そうだね。いま，君の計算で，7進法の数を10進法に表すことはできたが，逆に，10進法の数を7進法で表すことはできるかな。

S；　はい。形式的なやり方は，知っています。たとえば，10進法の354を，7進法で表すには，次のようにやります。

$$\begin{array}{r|l}7 & 354 \quad \text{余り} \\ 7 & \ \ 50 \cdots 4 \\ 7 & \ \ \ \ 7 \cdots 1 \\ & \ \ \ \ 1 \cdots 0\end{array}$$

とすれば，求められます。でも，その意味はよくわかりません。

T；　実は，君のやり方は，　$354\div7=50\cdots4$　④

$50\div7=7\cdots1$　⑤

$7\div7=1\cdots0$　⑥

という計算を，まとめてかいたものだ。ここで，④～⑥の計算の意味を考えてみよう。

④では，354を7ずつ分けると，10(＝7)の組が，$\boxed{a}$個できて，$\boxed{b}$余る。

⑤では，その$\boxed{a}$組を7ずつ分けると，100(＝$\boxed{c}^2$)の組が，$\boxed{d}$個できて，10の組が$\boxed{e}$個余る。

⑥では，その$\boxed{d}$組を7ずつ分けると，1000(＝$\boxed{c}^3$)の組が，$\boxed{f}$個できて，100の組が$\boxed{g}$個余る。

⑥の商が$\boxed{h}$より小さくなったのでやめる。以上のグループ分けで，1000の組が$\boxed{f}$個と，100の組が$\boxed{g}$個と，10の組が$\boxed{e}$個と，1が$\boxed{b}$個できた。

つまり，$\boxed{f}\times1000+\boxed{g}\times100+\boxed{e}\times10+\boxed{b}\times1=\boxed{f}\boxed{g}\boxed{e}\boxed{b}$ というわけだ。

これで，君のやった形式的な計算の意味が，わかったことと思う。では，応用として12進法の問題をやってみたまえ。10より大きい進法の場合には，10以下の進法の場合と違うことがでてくるね。

S；　そうです，そうです。12進法というのは，12が一まとめになる数ですから，10進法の10と11にあたる新しい記号(数字)を考えださなければいけませんね。そこで，いま10を**A**，11を**B**とします。たとえば，12進法の38Bは，10進法の$\boxed{i}$にあたります。また，10進法の268は，12進法では，$\boxed{j}$と表されます。(1)

T；　優秀，優秀。ところで，1，2，3，4，…… という，すべての自然数は，10進法で表されているわけだけれど，これはいいかえると，すべての自然数は，0，1，2，3，……，9の10個の記号で表されるということだ。ところが，面白いことに，0，1のたった2個の記号だけでも，また，10個よりも多い，0，1，2，……，9，A，Bの12個の記号でも，すべての自然数を表すことができる。つまり，10進法で表されたすべての自然数と，0と1

だけで表される数とを，次のように1対1に対応させることができる。

1	2	3	4	5	6	7	…………
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	10	11	100	101	110	111	…………

また，12個の記号で表される数についても，

1	2	3	…………	8	9	10	11	12	13	14	…………
↕	↕	↕		↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	2	3	…………	8	9	A	B	10	11	12	…………

のように，対応させることができる。

一般に，10進法で表されているすべての自然数は，n(ただし，nは2以上の自然数)個の記号で表される。それは，10進法で表されたすべての自然数と，n個の記号で表される数とが，1対1に対応するからだ。

S；　あっそうか。僕が前にやった，12進法の数を10進法におきかえたり，逆に，10進法の数を12進法におきかえたりすることが，自由にできるのは，**このこと**が保証されているからなんですね。(2)

T；　さて，話を発展させて，小数や分数の問題を考えてみよう。

S；　えっ，ちょっと，まって下さい。10進法以外の小数や，分数なんて考えられるんですか。むずかしくて中学生の僕には手に負えないのではありませんか。

T；　いや，いや，そんなことはないよ。10進法の小数や分数の構造がわかれば，今まで話したことをもとにして理解できるはずだ。

10進法で，23.124は，

$$23.124=2\times10+3\times1+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{10^2}+4\times\frac{1}{10^3}\cdots\cdots⑦$$

と表されることは，知っているね。そこで7進法の23.124は，

$$23.124=2\times7+3\times1+1\times\frac{1}{7}+2\times\frac{1}{7^2}+4\times\frac{1}{7^3}\cdots\cdots⑧$$

のことであると考えよう。

ここで，10進法の7は7進法では10(イチ・ゼロ)のことだから，7を10でおきかえると，⑧は，

$$23.124=2\times10+3\times1+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{10^2}+4\times\frac{1}{10^3}$$

となって，構造は⑦とまったく同じことになる。

S； いまの話は７進法についてですが，これらのことは，３進法や６進法や１２進法の小数についても，いえるわけですね。

T； もちろんだ。何進法の小数でも，その構造は同じだ。１０（イチ・ゼロ）の表す数が異なるだけだ。だから，何を代表にもってきてもよいのだが，いままでの話から，７進法で進めていくことにしよう。

さて，７進法の小数を７進法の分数で表すことを考えてみよう。

１０進法なら，

$$3.215=\frac{3215}{1000}=\frac{3215}{10^3}$$

と表されることを知っている。ところが，この関係式は７進法の場合でも同じだ。なぜかというと，

$$3.215=3\times1+2\times\frac{1}{7}+1\times\frac{1}{7^2}+5\times\frac{1}{7^3}$$

$$=\boxed{k}\times(3\times\boxed{l}+2\times\boxed{m}+1\times\boxed{n}+\boxed{o}\times1)=\frac{3215}{7^3}$$ (3)

（ただし，分子の３２１５は７進法であることに注意）

よって，$3.215=\frac{3215}{7^3}$ となる。ここで，７進法では，７は１０（イチ・ゼロ）なので，おきかえると，$3.215=\frac{3215}{10^3}$ となる。すなわち，

$$3.215=\frac{3215}{10^3} \quad \cdots\cdots⑨$$

という関係は，７進法でも成り立った。このように考えると，⑨は７進法に限らず，何進法でも成り立つということがわかるね。⑨を７進法とみれば，分母の１０は７のことで，分子は７進法の３２１５。⑨を１２進法とみれば，分母の１０は１２のことで，分子は１２進法の３２１５ということになる。

⑨について，もう一つ注目すべき点は，小数点以下のけた数３と，10^3 の３とが一致することだ。たとえば，0.0246は $\frac{246}{10^4}$ と表される。

S； なるほど，何進法であっても，$3.215=\frac{3215}{10^3}$，$0.0246=\frac{246}{10^4}$ と表されるわけですね。でも，どうして，小数を分数で表すことが必要なのでしょうか。

７進法の小数を，そのまま１０進法の小数におきかえられないのですか。

T； そう思うのも当然だね。ところが，自然数の場合と違って，小数どうしの間では，そう簡単ではない。とくに，小数を**有限小数**の範囲で考えると，一般に，おきかえはできない。７進法では，わり算が面倒だから，３進法で考えてごらん。たとえば，３進法の0.2を１０進法の有限小数で表してごらん。

S； えーと。やっぱり，できません。３進法の0.2を１０進法の有限小数で表すことはできませんね。(4)

T； そうだね。さっき，君は，なぜ小数を分数にしなくてはいけないのか，といったね。でも，君はこの問題を考えるとき，頭の中で小数を分数で表し，その分数をまた小数に直したのではないかな。

S； その通りです。小数のままで考えるより，分数を仲立ちにした方が考えやすいですね。

T； そうだろう。ところで，これからの話のためにも，ここで，分数の定義をはっきりさせておこう。**分数**とは，分子，分母が共に n 進法の自然数であるものとする。つまり，$\frac{0.4}{5}$ などは，このままでは分数とはみなさない。

さて，君も気がついたと思うが，有限小数は必ず分数で表されるね。これは，さっき考えたばかりだ。でも，分数は必ずしも有限小数で表されるとは限らない。

S； そうですね。たとえば，１０進法の $\frac{1}{3}$ は，１０進法の有限小数では表せません。0.33……となりますからね。でも先生，１０進法の $\frac{1}{3}$ は，３進法の有限小数では，表すことができますね。(5)

一体，どのようなときに，分数は有限小数になるんでしょうか。

T； なかなか，よい着眼だ。僕が答える前に君も考えてごらん。

S； はい。$\frac{1}{3}$ が10進法の有限小数で表せないのは，3が10の約数ではないからですか。

T： 良いところに気がついた。しかし，それでは不十分だ。なぜなら，$\frac{1}{4}$ は0.25という10進法の有限小数で表されるが，4は10の約数ではない。「分数を**既約分数**で表したとき，その分数が10進法の有限小数で表されるためには，どんなことがいえればよいか」ということだね。

（ここで，既約分数というのは，分子と分母に共通な約数（因数）がない分数のことである。）

たとえば，$\frac{1}{4}$ の分母4は，**素因数分解**すると $4=2\times2=2^2$ となり，素因数は2で，また2は10の**素因数**でもある。

（ここで，素因数分解とは，**素数**の積で表すこと。また，素因数とは，素因数分解したとき，かけあわされる各素数のことである。）

$\frac{5}{12}$ はどうだろうか。$12=2^2\times3$ で，12の素因数は2と3である。2は10の素因数だが，3はそうではない。実際，$\frac{5}{12}=0.4166\cdots\cdots$ となって，有限小数で表せない。

S； 先生，ちょっとまって下さい。僕にやらせて下さい。$\frac{3}{20}$ は，えーと，10進法の有限小数で表される。でも $\frac{7}{30}$ は，うーん，表されない。

あっ，そうか。わかりました。既約分数が10進法の有限小数で表されるためには，どんなことがいえればよいか，わかりました。(6) 感激だなあ。そして，この考えは，他の進法の場合でも同じというわけですね。

T； へえ，本当かな。本当に理解したかどうか，確かめてみよう。10進法の $\frac{25}{36}$ は6進法による有限小数で表されるが，その理由はどうか。そして，実際に計算して，6進法による有限小数で表してみなさい。

S； 理由は，分母の36の $\boxed{s}$ は $\boxed{t}$ と $\boxed{u}$ で，どちらも，6の $\boxed{s}$ となっているからです。また，計算は，次のようにやります。(7)

$\frac{25}{36}=\frac{25}{6^2}$，分子，分母を6進法で表すと $\frac{41}{10^2}$ となり，$\frac{41}{10^2}=0.41$

答えは　0.41　です。

T； おう，素晴らしい。それでは，これに類した応用問題をだしておくから，今度のときまでにやっておきなさい。

結局，n 進法の小数，分数も，10進法の構造と同じだ，ということは，これでわかったことと思う。また，10進法がベストというわけではないことについても，分数を小数で表す，ことからみると，12進法の方が10進法よりも，より多く有限小数に表せる，(8) ことからもいえる。人間の指が，12本であったらよかったのに，と思うこともあるよ。

また，小数を分数に直す，ということからみると，7進法は約分の手間がない。たとえば，$0.04=\frac{4}{100}$ であるが，もし10進法ならば，既約分数の $\frac{1}{25}$ にするために約分しなければならない。ところが，7進法のように7が素数であると，$\frac{4}{100}$ と表される数は，それ自身既約分数だから約分する必要がない。(9)

こういう点から考えると，7進法や11進法は10進法より勝っているといえるね。

S； 本当に，そうですね。10進法が本質ではなく，偶然だということがよくわかりました。今日は，どうもありがとうございました。

指　示

以上の対話をよく読み，理解した上で，つぎの問１から問１２に，対話の内容に基づいて答えなさい。

解答はすべて解答用紙に記入しなさい。

問　題

問１．本文４頁の $\boxed{\quad\quad}$ の中のことについて，□の中にあてはまる数を入れなさい。ただし，□の中にいれる数は１０進法で表すこと。

問２．４頁の下線部(1)について，□の中にあてはまる数（記号）を入れなさい。

問３．５頁の下線部(2)で，Ｓ君が言っている「このこと」とは，どういうことを指していますか。文中のことばを用いて答えなさい。

問４．５～６頁の $\boxed{\quad\quad}$ の中のことに関連して，３進法の 12.121 を，⑧式のような形で表しなさい。

問５．６～７頁の $\boxed{\quad\quad}$ の中に述べられていることに関連して，次の問いに答えなさい。

(1)　$\boxed{\quad\quad}$ の中の下線部(3)について，□の中にあてはまる数を入れなさい。

(2)　７進法の 0.123 を $\frac{1}{7}$ 倍した数を７進法の有限小数で表しなさい。

問６．７頁の下線部(4)について，３進法の 0.2 が１０進法の有限小数で表されない理由を述べなさい。

問７．７頁の下線部(5)について，１０進法の $\frac{1}{3}$ を３進法の有限小数で表しなさい。

問8．８頁の下線部(6)について，Ｓ君が気がついたことは「既約分数が，１０進法の有限小数で表されるためには，分母の$\boxed{ア}$がすべて，１０の$\boxed{ア}$になっていることである。つまり，分母が$\boxed{イ}$及び$\boxed{ウ}$以外の$\boxed{ア}$をもたないことである」ということです。$\boxed{}$の中にあてはまる言葉や数を入れなさい。

問9．８頁の下線部(7)について，$\boxed{}$の中にあてはまる言葉や数を入れなさい。

問10．９頁の｛　　｝の中に書いてある計算方法を参考にして，１０進法の$\frac{13}{27}$を６進法の有限小数で表そうと思う。次の$\boxed{}$の中にあてはまる数を入れなさい。

〔解〕

$$\frac{13}{27}=\frac{13}{3^3}=\frac{13\times\boxed{v}}{3^3\times\boxed{v}}=\frac{\boxed{w}}{\boxed{x}^3}$$

$\frac{\boxed{w}}{\boxed{x}^3}$ の分子，分母を６進法に直して，$\frac{\boxed{y}}{10^3}=\boxed{z}$。

ゆえに，答えは$\boxed{z}$。

問11．９頁の下線部(8)に関連して，次の問いに答えなさい。

集合Ｑを，$Q=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9}\right\}$とする。

このとき，

(1)　Ｑの要素のうち，１０進法の有限小数で表されるものをすべて上げなさい。

(2)　Ｑの要素のうち，１２進法の有限小数で表されるものをすべて上げなさい。

問12．９頁の下線部(9)について，「７進法で $\frac{4}{100}$ と表される数は，既約分数である」，その理由をのべなさい。