1994年度

国際基督教大学高等学校入学考査問題

数　　学

注　意

1. この考査は資料文とそれに続く問題文とで構成されています。資料文を読みすすめながら、対応する問題に答えてゆくのがよいでしょう。

2. 資料文や、問題文に、自由に書き込んでかまいませんが、解答は全て、解答用紙に記入して下さい。

3. この考査時間は、10時40分から12時00分までの80分間です。

4. その他の要領は、国語の考査と同様です。

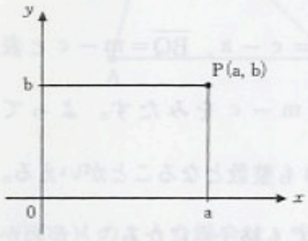
考査番号	G J	氏名	

G，Jのいずれかをマルで囲んでください。

資 料 文

1．格子点と直線

x-y座標平面上の点P（a，b）について考えよう。点Pは（図1）のような位置にある。

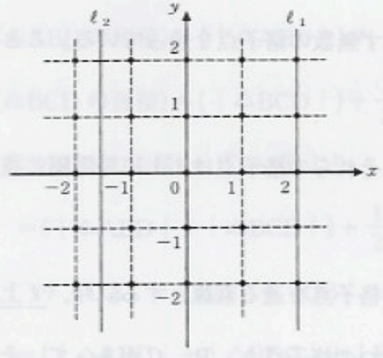


（図1）

ここでP（a，b）のa，bをそれぞれ点Pのx成分，y成分という。

x-y平面上の点のうち特にx成分もy成分も整数であるような点を**整数格子点**（以後簡単に**格子点**と略す）という。

x-y平面上に格子点を・で書き込むと（図2）のように規則正しく並んでいる。



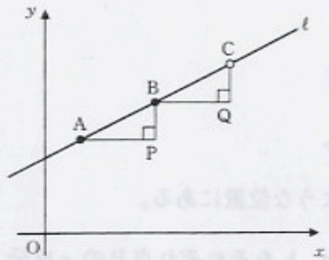
（図2）

今，x-y平面上に直線をひいたとき，その直線はいくつの格子点を通るだろうか。

最初に直線がy軸に平行な場合で考えてみよう。（図2）にあるような，直線ℓ_1は無数の格子点を通り，直線ℓ_2は1つも通っていない。x軸に平行な場合も同様に考えられる。…………………………［問1］

次に各軸に平行でない直線の場合について考えよう。まず，2つの格子点A（a，b），B（c，d）を通る直線ℓはどうだろうか。

ℓ上に$\overline{AB}=\overline{BC}$となる点C（m，n）をとろう。また（図3）のようにx軸，y軸に平行な辺で，2つの直角三角形ABP，BCQを作る。すると斜辺$\overline{AB}=\overline{BC}$，



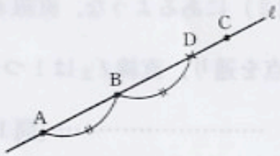
（図3）

また AP//BQ より∠BAP＝∠CBQ であり，△ABP≡△BCQ がいえる。

よって $\overline{AP}=\overline{BQ}$，$\overline{PB}=\overline{QC}$ である。A(a，b)，B(c，d) は格子点だったので，a，b，c，d は整数である。$\overline{AP}=c-a$，$\overline{BQ}=m-c$ と表わせて，$c-a=m-c$ をみたす。よって $m=2c-a$ となり，m は整数になる。同様にして，n も整数となることがいえる。つまり，A，Bが格子点ならば，このようにとった点Cも格子点になることがわかった。したがって，ℓ上に $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$ のように次々と格子点をみつけることができる。

このことは「2つの格子点を通る直線は，必ず無数の格子点を通っている」ことを示したことになる。

さらに「直線ℓが無数の格子点を通るとき，それらの格子点はℓ上に等間隔に並んでいる」ことを示そう。



（図4）

ℓを無数の格子点を通る直線とする。今，ℓ上に隣りあう3つの格子点A，B，Cがあって，それらが等間隔に並んでないと仮定しよう。そこで（図4）のように $\overline{AB}<\overline{BC}$ と仮定する。前の議論より $\overline{AB}=\overline{BD}$ となる点Dをℓ上にとれば，点Dは格子点であった。これは，B，Cの間にℓ上の格子点があることになり，最初に仮定したA，B，Cが隣りあうことと矛盾する。つまり，この矛盾は，隣りあう3つの格子点が等間隔に並んでないと仮定したことによる。したがって，そのような3つの格子点はないことになり，隣りあうどの2つの間隔も等しいことがいえる。

このような証明法（ある結論を証明するときに結論の否定を仮定して矛盾を導くことにより証明する方法）を**背理法**という。

次に直線 $y=\sqrt{2}\,x$ について考えてみよう。この直線は，明らかに格子点（0，0）を通るが，それ以外には，格子点を通らない。これを背理法で証明しよう。

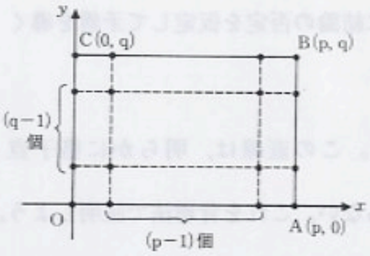
直線 $y=\sqrt{2}\,x$ が原点O（0，0）以外に格子点A（a，b）を通ったと仮定する。すると，2点O，Aを結ぶ直線の傾きは $\frac{b}{a}$ であり，$\sqrt{2}=\frac{b}{a}$ が成立することになる。今，a，bは整数であったので，これは矛盾である。したがって，直線 $y=\sqrt{2}\,x$ は原点O以外に格子点は通らないことがわかった。

以上のことから次の結論を得た。

x - y 平面上に直線をひいたとき，その直線上の格子点の数は，0個，1個，無数個の3つのタイプしかない

………[問2]

2．格子点多角形と面積



(図5)

（図5）のような格子点を頂点とする長方形 OABC について，その面積と格子点の数の関係を調べよう。

$(\text{長方形 OABC の面積}) = p\,q$

一方，この長方形 OABC の内部（辺および頂点を含まない）には $(p-1)(q-1)$ 個の格子点があり，また辺上(頂点を含む)には $2\{(p-1)+(q-1)\}+4 = 2p+2q$ 個の格子点がある。

ここで $\{\text{内部の格子点の数}\} + \dfrac{1}{2}\{\text{辺上の格子点の数}\} - 1$ を計算してみると

$\{(p-1)(q-1)\} + \dfrac{1}{2}\{2p+2q\} - 1 = p\,q$ となる。これは，長方形の面積と一致する。

実は，上のような長方形に限らず，一般に次の公式がある。

> **(Pick の公式)**
>
> 格子点を頂点とする多角形の面積 S は
>
> $$S = I + \frac{1}{2}J - 1 \quad \cdots\cdots (*)$$
>
> である。ただし I は多角形の内部（辺および頂点を含まない）の格子点の数，
>
> J は辺上（頂点を含む）にある格子点の数。

これを(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ) の順に確めよう。

そのために次のような記号を使うことにする。

$|AB|$　は両端点を除く線分 AB 上の格子点の数

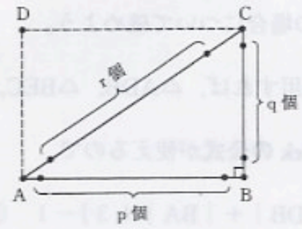
$|\triangle ABC|$　は△ABC の内部（辺および頂点を含まない）の格子点の数

$|\square ABCD|$　は四角形 ABCD の内部（辺および頂点を含まない）格子点の数

（Ⅰ）各軸に平行な辺をもつ直角三角形の場合

（図6）のような直角三角形 ABC を考える。AB，BC は x 軸，y 軸に平行とする。

また $|AB| = p$，$|BC| = q$，$|AC| = r$ とする。



(図6)

$$(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{BC}$$
$$= \frac{1}{2}(p+1)(q+1) \quad \cdots\cdots ①$$

一方 $|\triangle ABC| = (|\square ABCD| - r)\times\dfrac{1}{2}$
$$= \frac{1}{2}(p\,q - r)$$

であるので △ABC において Pick の公式(＊)の右辺に代入してみると

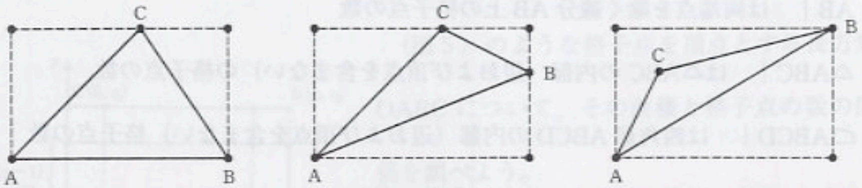
$$I + \frac{1}{2}J - 1 = \left\{\frac{1}{2}(p\,q - r)\right\} + \frac{1}{2}\{p+q+r+3\} - 1$$
$$= \frac{1}{2}(p\,q + p + q + 1)$$
$$= \frac{1}{2}(p+1)(q+1) \quad \cdots\cdots ②$$

①と②より

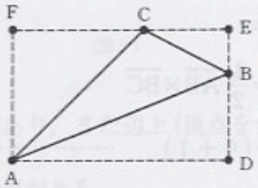
$(\triangle ABC \text{ の面積}) = I + \dfrac{1}{2}J - 1$　となり

Pick の公式をみたすことがわかる。

（Ⅱ） その他の三角形の場合



（ア）　（イ）　（ウ）



（図７）

三角形の形に応じて，上のような x 軸，y 軸に平行な辺をもつ格子点長方形を補なう。

ここでは（イ）の場合について確めよう。

（Ⅰ）の結果を利用すれば，△ADB，△BEC，△CFA の面積は **Pick の公式**が使えるので，

$(\triangle\mathrm{ADB}\text{ の面積}) = \{|\triangle\mathrm{ADB}|\} + \frac{1}{2}\{|\mathrm{AD}| + |\mathrm{DB}| + |\mathrm{BA}| + 3\} - 1$　①

$(\triangle\mathrm{BEC}\text{ の面積}) = \{|\triangle\mathrm{BEC}|\} + \frac{1}{2}\{|\mathrm{BE}| + |\mathrm{EC}| + |\mathrm{CB}| + 3\} - 1$　②

$(\triangle\mathrm{ACF}\text{ の面積}) = \{|\triangle\mathrm{ACF}|\} + \frac{1}{2}\{|\mathrm{AC}| + |\mathrm{CF}| + |\mathrm{FA}| + 3\} - 1$　③

また長方形 ADEF は，各軸に平行な辺をもつので **Pick の公式**を用いれば，

$(\text{長方形 ADEF の面積}) = \{|\triangle\mathrm{ADB}| + |\triangle\mathrm{BEC}| + |\triangle\mathrm{ACF}| + |\triangle\mathrm{ABC}|$

$+ \boxed{\quad(\mathrm{i})\quad}\} + \frac{1}{2}\{|\mathrm{AD}| + |\mathrm{DB}| + |\mathrm{BE}| + |\mathrm{EC}| + |\mathrm{CF}| + |\mathrm{FA}|$

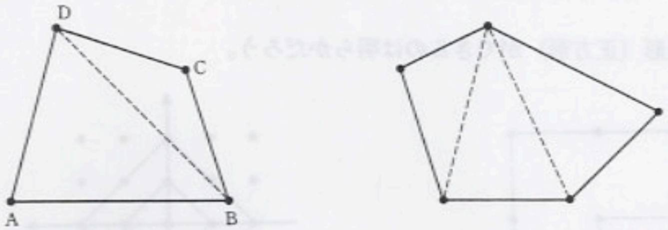
$+ \boxed{\quad(\mathrm{ii})\quad}\} - 1$ ……………………………………………………④

よって $(\triangle\mathrm{ABC}\text{ の面積}) = ④ - (① + ② + ③)$

$= \{|\triangle\mathrm{ABC}|\} + \frac{1}{2}\{|\mathrm{AB}| + |\mathrm{BC}| + |\mathrm{CA}| + 3\} - 1$

となり，**Pick の公式**をみたすことがいえる。 ………………………………［問３］

（Ⅲ） 一般の格子点多角形の場合



（図８）

（図８）のような場合は，交わらない対角線をひき，いくつかの格子点三角形に分ける。各格子点三角形には **Pick の公式**が利用できる。

（図８）の四角形 ABCD について調べる。

$(\triangle\mathrm{ABD}\text{ の面積}) = \{|\triangle\mathrm{ABD}|\} + \frac{1}{2}\{|\mathrm{AB}| + |\mathrm{BD}| + |\mathrm{DA}| + 3\} - 1$　①

$(\triangle\mathrm{BCD}\text{ の面積}) = \{|\triangle\mathrm{BCD}|\} + \frac{1}{2}\{|\mathrm{BC}| + |\mathrm{CD}| + |\mathrm{DB}| + 3\} - 1$　②

（□ABCD の面積）＝①＋②より

$= \{|\triangle\mathrm{ABD}| + |\triangle\mathrm{BCD}|\} + \frac{1}{2}\{|\mathrm{AB}| + |\mathrm{BC}| + |\mathrm{CD}|$

$+ |\mathrm{DA}| + |\mathrm{BD}| + |\mathrm{DB}| + 6\} - 2$

$= \{|\triangle\mathrm{ABD}| + |\triangle\mathrm{BDC}| + |\mathrm{BD}|\} + \frac{1}{2}\{|\mathrm{AB}| + |\mathrm{BC}| + |\mathrm{CD}|$

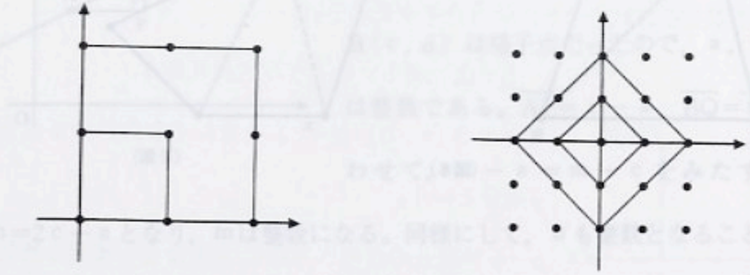
$+ |\mathrm{DA}| + 4\} - 1$

となり，これは **Pick の公式**をみたす。 …………………………………………［問４］

3．格子点正多角形について

格子点を頂点にもつ正多角形はあるのだろうか。

正四角形（正方形）ができるのは明らかだろう。



(図9)

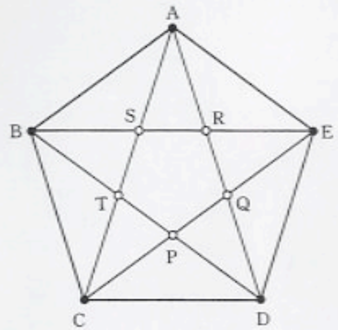
………[問5]

では，格子点正三角形はあるのだろうか。

はじめに「格子点正三角形ができる」と仮定してみよう。各頂点が格子点であるのでPickの公式を利用して面積を求める。すると面積は必ず $\frac{(\text{整数})}{2}$ となるはずである。一方，格子点正三角形 ABC の一辺の長さを $\overline{AB}=\ell$ とすると，その面積は，ℓ で表わすと $\boxed{\quad(\text{iii})\quad}$ であり，また ℓ^2 は整数となる (iv) ので，先に求めた $\frac{(\text{整数})}{2}$ と矛盾する。(v) したがって格子点正三角形はできないことがわかった。

………[問6]

次に「格子点正五角形は存在しない」ことを背理法で示そう。



(図10)

格子点正五角形が存在するとしよう。すると，その中で一番小さいものがある。それを ABCDE とする。

正五角形 ABCDE に対角線をひき，交点を（図10）のように P，Q，R，S，T とする。正五角形は円に内接するので $\angle ECA=\angle CAB$，$\angle BCA=\angle CAD$。よって $CE \parallel AB$，$BC \parallel AD$。また AB＝BC より四角形 ABCQ はひし形である。今，A，B，C が格子点なので点Qも格子点になる。(vi) さらに $\angle ABC=\angle PQR=$ $\boxed{\quad(\text{vii})\quad}$ がいえる。同じように点 P，R，S，T も格子点になり，五角形 PQRST の内角はみな等しい事がわかる。また△ARS，△BST，△CTP，△DPQ，△EQR が全て合同であることより PQ＝QR＝RS＝ST＝TP となる。つまり五角形 PQRST は，格子点正五角形であることがいえる。これは一番小さいはずの格子点正五角形の中に，それより小さい格子点正五角形が存在することを意味する。これは矛盾である。したがって，格子点正五角形は存在しないことが示された。

……[問7]

実は「格子点正多角形は正四角形を除いて存在しない」ことが同じように証明できるのである。

1994年度　問　題　（訂 正）

P 2　「問 6」　2)

[問6]

2)　ℓ^2 は整数となる$_{(iv)}$　ことを2頂点A(0, 0), ~~A~~ B (a, b) として説明せよ。

1994年度　問　題

[問1]　x 軸に平行な直線で格子点を無数に通るものと全く通らないものを1つずつ式で求めよ。

[問2]

1)　なぜすべての直線がこの3つのタイプに分けられるのか簡単に説明せよ。

2)　2点A(−1, 13), B(11, 3) とするとき，A，Bを通る直線の式を求めよ。さらに線分ABの間に（点A, Bを除いて）格子点は何個あるか。

3)　直線 $y=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{3}$ 上の格子点の数は0個，1個，無数個のどれか説明せよ。

（ヒント：$y=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{3}$　を　$5y-3x=\dfrac{5}{3}$ と変形して考えよ）

4)　原点Oと格子点A(a, b) (a > 0, b > 0) がある。また，g を a，b の最大公約数とするとき線分 OA 上の格子点で点Aの隣りにあるものの座標を求めよ。

[問3]　空らん $\boxed{\quad(\mathrm{i})\quad}$ $\boxed{\quad(\mathrm{ii})\quad}$ を埋めよ。

[問4]

1)　O(0, 0), A(6, 3), B(5, 6), C(−1, 3) を頂点とする格子点四角形 OABC について｜◻OABC｜を求めよ。

2)　A（0，8）と x 軸上の2つの格子点B，Cがあり△ABC の面積は24である。

このとき△ABC について｜△ABC｜の最大値，最小値を求めよ。

[問5]

1)　原点Oと格子点A（a，b）を隣りあう2頂点とする格子点正方形の他の2頂点の座標を求めよ。

2)　原点Oと点B（p，q）について格子点正方形OABC を作ることができるとき，p，q の条件は何か？

[問6]

1)　空らん $\boxed{\quad\text{(iii)}\quad}$ を埋めよ。

2)　ℓ^2 は整数となる(iv) ことを2頂点A(0, 0), A（a，b）として説明せよ。

3)　矛盾する(v) とあるが，どのような矛盾か。

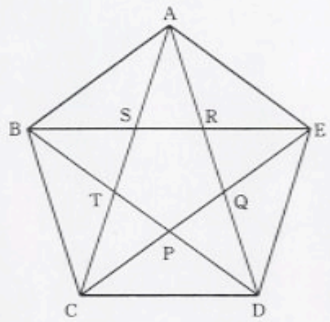
4)　「格子点正六角形ができないこと」を背理法で示せ。

[問7]

1)　点Qも格子点になる(vi) ことをA (a_1，a_2)，B (b_1，b_2)，C (c_1，c_2)，Q（x，y）として説明せよ。

2)　空らん $\boxed{\quad\text{(vii)}\quad}$ は何度か。

3)



一辺の長さ1の正五角形（格子点でない）ABCDE に対して，中の正五角形 PQRST の一辺の長さを x とする。

i)　x のみたす方程式を求めよ。また x の値はいくつか。

ii)　2つの正五角形 ABCDE と PQRST の面積比を求めよ。