1996年度

国際基督教大学高等学校入学考査問題

数　学

注　意

1．この考査は資料文とそれに続く問題文とで構成されています。資料文を読みすすめながら，対応する問題に答えてゆくのがよいでしょう。

2．資料文や，問題文に，自由に書き込んでかまいませんが，解答は全て，解答用紙に記入して下さい。

3．この考査時間は，12時50分から2時10分までの80分間です。

4．その他の要領は，他の科目の考査と同様です。

考査番号	G J	氏名	

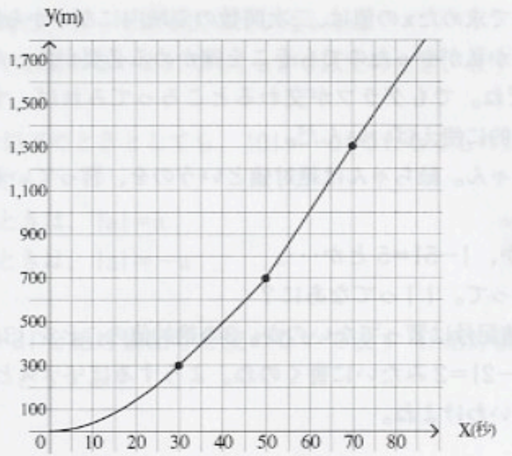
G，Jのいずれかをマルで囲んでください。

資料文

中学三年生の緑さんは、大学に入ったばかりの従兄の聡さんに、色々な数学の話を聞くのが好きです。

聡：今日は何の話をしようか？

緑：この間学校で、こういう問題を解いたんだけど、

> 下のグラフは、電車AがM駅を出発してから、x秒間にyメートル進んだとして、xとyの関係を示したものである。このとき、
> $0 \leqq x \leqq 30$では、$y=ax^2$ の関係が成り立ち、
> $30 < x \leqq 50$では、速さは一定で、秒速は20メートル、
> $50 < x$では、速さは一定で、秒速は30メートルになるという。
> 次の問いに答えよ。
>
> ①電車Aについて、yとxの関係を式に表すと、$0 \leqq x \leqq 30$では$y=ax^2$、$30 < x \leqq 50$ では $y=bx+c$、$50 < x$ では $y=dx+e$ となる。
> a, b, c, d, e, の値を求めよ。
>
> ②電車AがM駅を出発すると同時に回送電車Bが電車Aを追い越して行った。Bの速さは毎秒20メートルであるという。Bの運行の様子を示すグラフを、下の図に書き入れよ。又AがBに追い付くのは、AがM駅を出発してから何秒後か。
>
> 
>

緑：そのとき先生が、これは高校に行ったら、もっと難しい形で出て来るから、よーく理解しとけって言われたの。これはこれでわかったつもりなんですけど、「よーく」ってとこに自信が持てないの。何かこれに関係した話をして欲しいんだけど…。

聡：そうだなあ。先生がよーくって言った中にはね、グラフの読み取り方の問題があると思うから、まずグラフの話をしてみようか。グラフっていうのはx（この場合はM駅を出発してからの時間）の値にy（この場合はM駅からの距離）を対応させるわけだよね。緑ちゃんがあげた問題でいえば、$0 \leqq x \leqq 30$, $30 < x \leqq 50$, $50 < x$では、yの変化の仕方も違うよね。$0 \leqq x \leqq 30$の時は、yの値はxを二乗したものをa倍したものに対応しているし、$50 < x$では、$dx+e$の値がyだ。こういうふうに今考えているxがどの範囲にあるか、というのがとても大切なんだ。

緑：はい、それはわかります。xの変域に注意しろっていうことね。

聡：そう。それともう一つ、「電車Aが回送電車Bに追いつくのが何秒後か」っていう問題なんだけど、電車Aのグラフと回送電車Bのグラフが交わるときのx座標をみればいいわけだね。ところで、式で解くとどうなるかい？

緑：$dx+e=20x$ を解いてそのxの値を求めればいいんです。

聡：でも、$20x=ax^2$…(＊)としてもxの値が出て来るけれど、その値はどうしてだめなんだろう。

緑：えっ、でもそれは…。出発して□秒後には、もう二次関数ではありません。つまり(＊)で求めたxの値は、二次関数の変域内にないから解じゃないんです。あっ、そうか私がやったのでもそこを確かめる必要があったのね。

聡：そう面倒だね。でもグラフが交わるところってみれば、すぐわかるだろう。計算は補助的に使えばいいんだ。　**問題１**

さて、緑ちゃん。緑ちゃんは絶対値というのを、習っているよね。

緑：ええ、一応。

聡：$|3|=3$ とか、$|-5|=5$ とか…。

緑：ちょっと待って。| |ってなあに？

聡：あれ。絶対値記号は習ってないのか。3の絶対値のことを $|3|$ と書くんだ。

緑：ふーん。$|-2|=2$ みたいに書くのね。ようするにプラスとかマイナスの符号を取ればいいわけよね。

聡：うーん。そうすると $|a|=a$ で、$|-a|=a$ かい？

緑：違うの？

聡：aが3の場合は、確かに

$|a|=a$, $|-a|=a$ だけど、

aが-5だと、

$|a|$がいつもaとすると $|-5|=-5$ となってしまうよ。

緑：あっそうか。じゃ、どうすればいいの？

聡：$|-5|$は5なんだろ？

その5を-5を使って表すにはどうしたらいいだろう。

緑：5を-5を使って表すの？ あっそうか。-5の前にマイナスをつければいいのね。

$$5=-(-5)$$

つまり、

〈aが負の数だったら、$|a|=-a$〉　となるわけなの。

変な感じ。絶対値なのにマイナスがあるなんて。

聡：絶対値記号の中味が文字のとき、今までのことをまとめてごらん。

緑：はい。

aが正のときは、$|a|=a$

aが負のときは、$|a|=-a$

あれ、$a=0$の時は、どっちにも入っていないわ。

聡：どっちにいれても構わないよ。でも、aが0以上のとき、とするのが普通だろうね。

緑：そうか。aが0以下のときとしても、$|0|=-0=0$となるものね。

それでは改めて…

$0 \leqq a$のときは、$|a|=a$

$a<0$のときは、$|a|=-a$

となる。

聡：ところで$|x+2|$を絶対値記号を使わないで表す（「絶対値記号をはずす」という）には、どうする？

緑：えーと、$0 \leqq x$のときは、$|x+2|=x+2$ で

　　$x<0$のときは、$|x+2|=-x+2$ です。

聡：本当にそうかい。

例えば、$x=-1$ だったら、緑ちゃんによれば、

$$|-1+2|=-(-1)+2$$ となるよ。

緑：あれっ？　左辺が1で、右辺が3になっちゃう。

じゃ違うのか。

聡：$x+2$ をひとまとまりとして、考えたらいいんじゃないか？

緑：$0 \leqq x+2$のときとか、

$x+2<0$のときにわけるの？

聡：そう。

緑：$0 \leqq x+2$のとき、つまり $-2 \leqq x$ のときは、

$$|x+2|=x+2$$

$x+2<0$のとき、つまり $x<-2$ のときは、

$$|x+2|=-(x+2)$$

となるわけね。

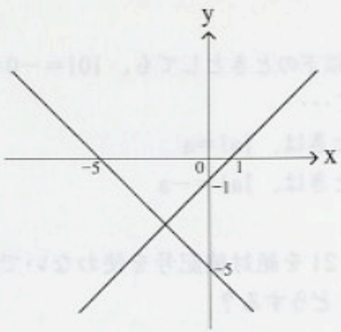
問題２

聡：絶対値記号の中にxの一次式が入っている時、絶対値記号をはずすことが、できるようになったんだから、それを使ってグラフをかいてみよう。

緑：$y=|x+2|-3$みたいなグラフですか。絶対値記号をはずすことは、できるけど。

$$y=x+2-3=x-1$$

$$y=-(x+2)-3=-x-5$$



二本になっちゃいそう。

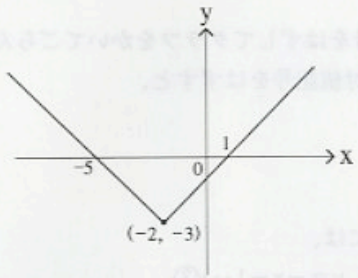
聡：ふーん。で、$y=x-1$ と、$y=-x-5$ の交点のx座標は何になる？

緑：$x=-2$だけど･･。あっそうか、

$-2 \leqq x$のときは、$y=x-1$

$x<-2$のときは、$y=-x-5$

なんだから･･･。あっ、さっきの話しね。xの変域に注意するっていう。



こうなるのかしら。

問題３

聡：そうその調子。じゃ次に、

$$y=|x+2|+|2x-1|$$

を考えてごらん。

緑：わーっ。絶対値が二つもある。

えーと、最初の絶対値記号の中味は、$x=-2$ を境に正負がわかれて、二番目のは、$x=\frac{1}{2}$ を境に正負がわかれるんだから････。

$x<-2$のとき、

$$y=-(x+2)-(2x-1)$$
$$=-3x-1$$

$-2 \leqq x<\frac{1}{2}$ のとき、

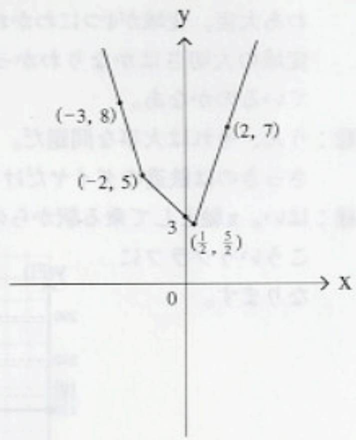
$$y=x+2-(2x-1)$$
$$=-x+3$$

$\frac{1}{2} \leqq x$ のとき、

$$y=x+2+2x-1=3x+1$$

となります。

つまりグラフは････。



聡：すごいじゃないか。三本の直線のそれぞれについて、少なくとも2点の座標を記入した方がいいね。

問題4，5，6

じゃ、次に絶対値の中に絶対値が入っているグラフっていうのを考えてみよう。

緑：えーっ、中カッコの中に小カッコが入っているような？

聡：そうそう、いい線いってるよ。

たとえば $y=||x|-1|$ の絶対値記号をはずしてグラフをかいてごらん。

緑：まず $x<0$ と $0\leqq x$ と分けて中の絶対値記号をはずすと、

$x<0$のとき $y=|-x-1|$ ···①

$0\leqq x$のとき $y=|x-1|$ ···②

となります。

次に①のときの絶対値記号をはずすには、

$0\leqq -x-1$、つまり $x\leqq -1$ のとき $y=-x-1$···③

$-x-1<0$、つまり $-1<x$ のとき $y=-(-x-1)=x+1$··④

聡：ちょっと待って！

①で $x<0$ だったね。

緑ちゃんの④だと $-1<x$ だからxは2でも3でもよくなっちゃうよ。

緑：あっ、そうか。

④は「$-1<x<0$」 のときとなるわけね。

問題7，8

それから②のときも同様にすると···、

わあ大変。変域が4つにわかれちゃうのね。

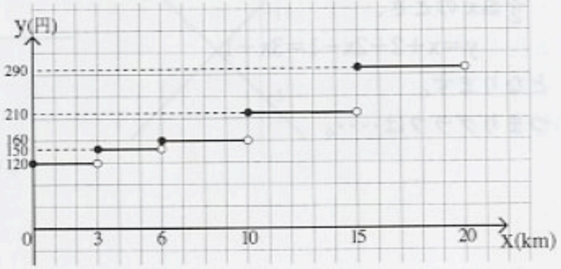
変域の大切さはかなりわかったつもりだけれど、グラフっていつもつながっているのかなあ。

聡：うん、それは大事な問題だ。

さっきのは鉄道のダイヤだけど、鉄道の料金っていうのもグラフになるよね。

緑：はい。x軸として乗る駅からの距離をとって、y軸として料金をとると、

こういうグラフになります。



聡：そうそう、緑ちゃんはわかっているようだから、●と○の意味について説明してくれるかい。

緑：えーと、例えば $0\leqq x<3$ の時、$y=120$ だったりすると、0kmの時は120円だけど3kmになると120円じゃなくて、150円になっちゃうということです。

聡：つまり $a\leqq x<b$ の場合はaはxの変域に含まれるという意味で●を書き、bは含まれないので○と書くんだよね。

それじゃあついでだから、この鉄道料金のグラフみたいなものを1つの式で表す記号を教えてあげよう。

緑：えっ、そんな記号があるの。

聡：そう、ガウス記号というんだけど、

ある数xがあったとき、そのxをこえない最大の整数を、xの整数部分と呼んで、[x]（「ガウスx」と読む）で表す。すなわち、

[x] は、$n\leqq x<n+1$ を、満たす整数nのこと。

と、数学の本には書いてあるけどちょっとわかりにくいかな。

緑：何か例で教えてくれると、わかると思うんだけどな。

聡：うん。[2.4]=2 とか、[3.9]=3となるんだ。

緑：じゃあ、[−2.6]=−2なの？

聡：いや、〈xをこえない最大の整数〉だろ？

緑：あ、そうか。$-3\leqq -2.6<-3+1$ だから、

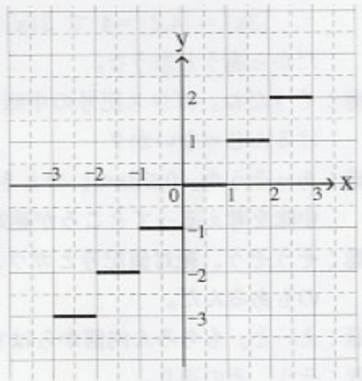
[−2.6]=−3ですね。

聡：そう、その通り。さて、それじゃ、

y=[x]

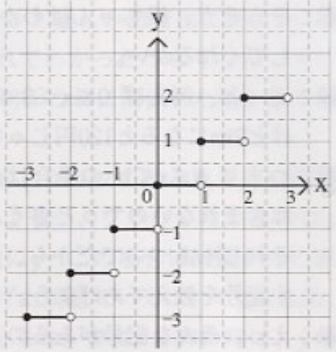
を、グラフで表してみるとどうなるかな？

緑：あっそうか。こういうふうに階段みたいになるのね。



聡：そう、大体いいけれど、このグラフだと、
　xが2のとき、$[x]$ は、
　1なんだか2なんだか、わからないね。

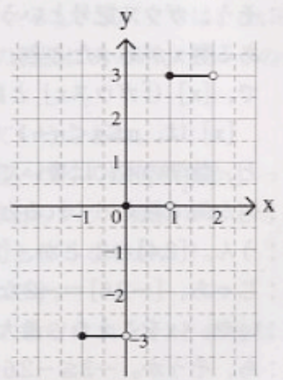
緑：ああそれで●と○が、大切になって
　くるんだ。じゃあ、右のようにグラフを
　かき直します。



　面白いわ。
　xが1つ与えられれば、
　必ず1つだけ、yの値が決まるわけね。
　　$y=[2x]$ や、
　　$y=[-x]$ も、
　考えられるんでしょう。

聡：そう、例えば$y=3[x]$
　ってどういうグラフになると思う？

緑：えーと、$0\leqq x<1$のときは $y=0$、
　$1\leqq x<2$のときは $y=3$
　$-1\leqq x<0$のときは $y=-3\cdots$
　ですから、こうなると思います。



聡：その通りだ。じゃあ $y=[3x]$ も同じかな？

緑：$x=0$や1や-1のときは、$[3x]$ も$3[x]$ も同じ値になるけれど、
　$x=1.4$　なんかだと、
　　$[3x]=[4.2]=4$ で $3[x]=3\times[1.4]=3\times1=3$
　だから違うと思うな。

聡：そうだね。ガウス記号の中味の変わり方に注意すると$y=[3x]$ のグラフも書
　けるんじゃないか？

緑：あっそうか。$0\leqq 3x<1$ のときは、$y=0$ と考えるのね。
　中味を考えるってところが絶対値記号をはずすのとよく似ているわ。

聡：そうそう、絶対値記号とガウス記号が組み合わさった $[|x|]$、$|[x]|$ みたいな
　のもあるんだ。

緑：えーと。もちろん内側からはずしていけばいいのよね。

聡：そう、その通り。

問題 9

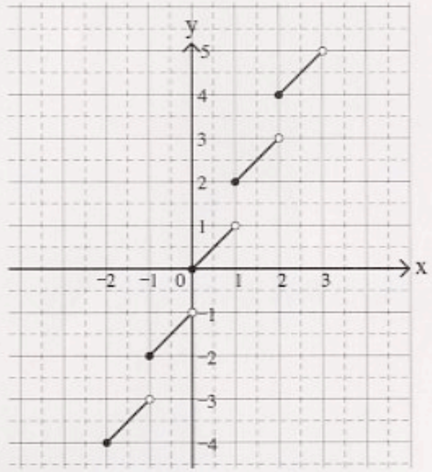
緑：絶対値記号が2つあったように、$y=[x]+[2x]$ みたいなのもあるんでしょ
　う。

聡：うん。でも、それより、今度は　$y=x+[x]$ のグラフを考えてみよう。

緑：やっぱりxの変域をわけて考えるのね。

聡：そう、ここでは、$-2\leqq x<3$ の範囲で考えてみようか。

緑：はい。



　　$-2\leqq x<-1$のとき
　　　　$y=x-2$
　　$-1\leqq x<0$　のとき,
　　　　$y=x-1$
　　$0\leqq x<1$　のとき,
　　　　$y=x$
　　$1\leqq x<2$　のとき,
　　　　$y=x+1$
　　$2\leqq x<3$　のとき,
　　　　$y=x+2$
　わぁ、登りにくそうな階段だ。

聡：このぐらいだと、ちょっとは登れそうかい。

緑：うん。

問題10

聡：それじゃあガウス記号を使って、次のような問題に挑戦してごらん。

緑：はい。

問題11，12

聡：先生が「よーく」って言った意味がわかったかい？

緑：何か今の所、新しい記号で頭がごちゃごちゃしちゃっているけれど、「グラフ」
　ってものについて、今までよりわかったような気がします。
　どうもありがとう。

1996年度　問　題

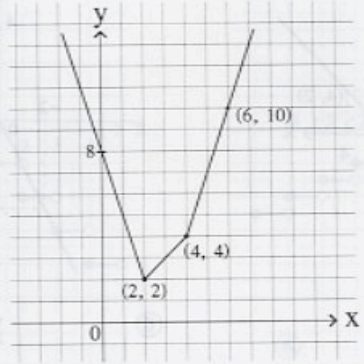
問題１　緑さんが、学校で解いた問題を解きなさい。

問題２　$|2x-3|$ の絶対値記号を、はずしなさい。

問題３　$y=|x+2|-3$ のグラフにならって、$y=|x-1|-3$ のグラフを、x軸との交点を求めて、かきなさい。

問題４　なぜ、少なくとも２点の座標を記入した方が良いのか、簡潔に答えなさい。

問題５　下のグラフは、$y=|ax-4|+|x+b|$ のグラフである。
a, b の値を求めなさい。



問題６　$y=|x+1|-|2x-2|$ の絶対値記号をはずし、問題５のグラフにならって、$y=|x+1|-|2x-2|$ のグラフをかきなさい。

問題７　②のときの絶対値記号を、はずしなさい。

問題８　　下に６つのグラフがある。そのグラフを表す式を記号で答えなさい。

ア．$y=|2|x|-4|$　　イ．$y=-|x-2|+|x+2|$

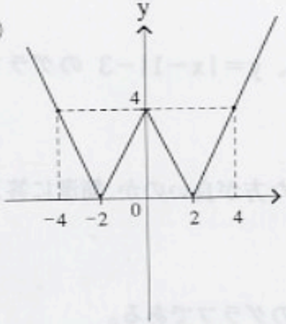
ウ．$y=x+2-|x-2|$　　エ．$y=|x-2|-|x+2|$

オ．$y=|x-2|+|x+2|$　　カ．$y=x-2+|x-2|$

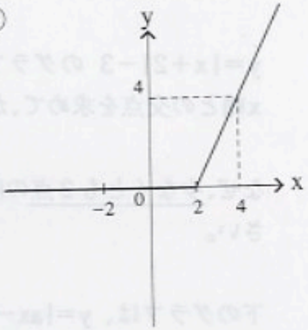
キ．$y=|2|x|+4|$　　ク．$y=-|x|+2$

ケ．$y=||x|-2|$　　コ．$y=|2x-4|$

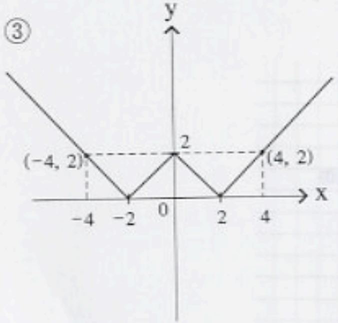
①



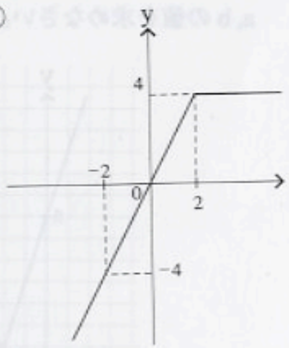
②



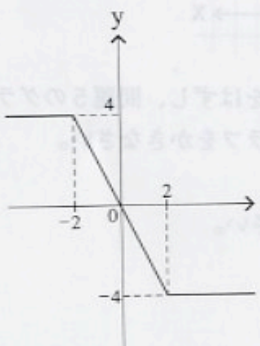
③



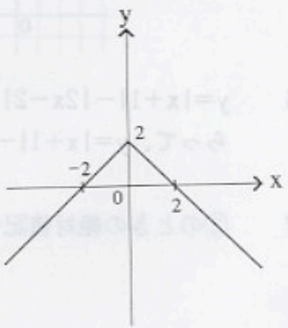
④



⑤



⑥

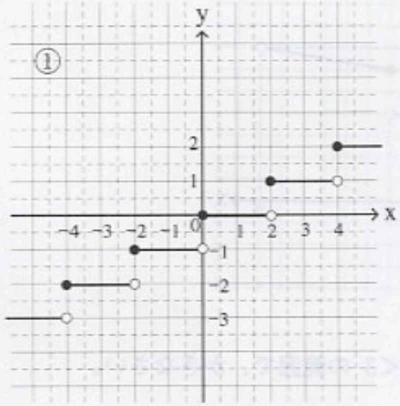


問題９　　下に６つのグラフがある。そのグラフを表す式を記号で答えなさい。

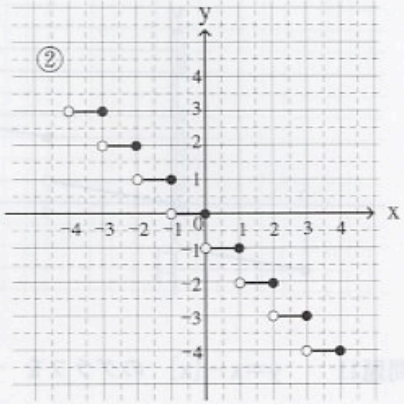
サ．$y=[2x]$　　シ．$y=[\frac{1}{2}x]$　　ス．$y=[-x]$　　セ．$y=2[x]$

ソ．$y=\frac{1}{2}[x]$　　タ．$y=-[x]$　　チ．$y=[|x|]$　　ツ．$y=|[x]|$

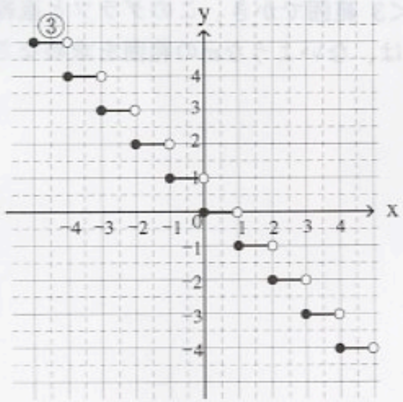
①



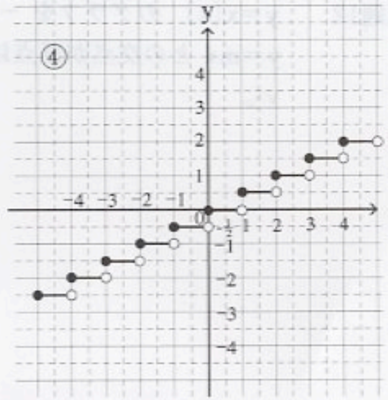
②



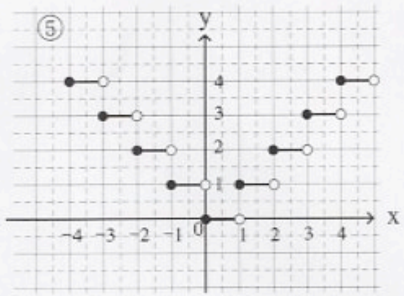
③



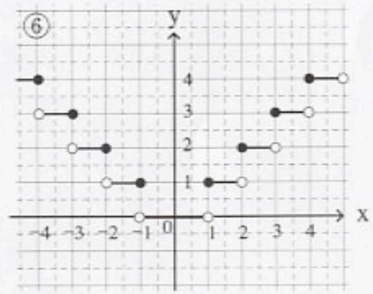
④



⑤

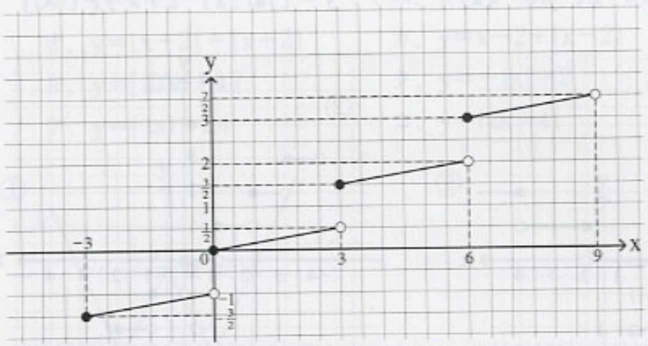


⑥



問題10　下のグラフは　$y=ax+[bx]$　のグラフである。

a, bの値を求めなさい。



問題11　$y=x-[x]$　のグラフを　$-2\leqq x<3$　の範囲で、かきなさい。

問題12　$y=x[x]$　のグラフを　$-2\leqq x<3$　範囲でかき、このグラフと直線 $y=mx$　との交点が原点以外には、ないようなmの範囲を求めなさい。