1998年度

国際基督教大学高等学校入学考査問題

数　学

注　意

1．この考査は資料文とそれに続く問題文とで構成されています。資料文を読みすすめながら，対応する問題に答えてゆくのがよいでしょう。

2．資料文や，問題文に，自由に書き込んでかまいませんが，解答は全て，解答用紙に記入して下さい。

3．この考査時間は，12時50分から２時10分までの80分間です。

4．その他の要領は，他の科目の考査と同様です。

考査番号	G J	氏名	

G, Jのいずれかをマルで囲んでください。

資料文

以下の資料文は、中学生のM君と彼に数学を教えているおじさんのT先生のお話です。T先生は大学で数学を勉強している人で、M君に数学の話をよくしてくれます。

つぎの会話もそのひとつです。文中にある問題に答えながら、読み進めてください。

T：　M君、中学で習ったと思うけど、１，２，３，４，５の数字があって、これらを１回ずつ使ってできる５ケタの整数は全部で何通りできますか。

M：ええと、５×４×３×２×１だから全部で１２０通りです。

T：そうだね。では、その１２０通りを小さい方から大きい方へ順に並べてできる５ケタの整数で、一番大きい数はいくつですか。また、小さい方から数えて、ちょうど５０番目の数はいくつですか。

M：$\boxed{\langle 1\text{-}1\rangle}$、$\boxed{\langle 1\text{-}2\rangle}$ です。…問題１

T：　正解。さらに条件をつけて。この１２０通りの５ケタの整数のうちで

１番目の数字（万の位）が１でなく、 ２番目の数字（千の位）が２でなく、 ３番目の数字（百の位）が３でなく、 ４番目の数字（十の位）が４でなく、 ５番目の数字（一の位）が５でない

この条件を満たす整数は全部でいくつあるでしょうか。

M：たくさんありそうですね。すぐには答えられません。パソコンなら答えてくれそうですね。

T：　後で、パソコンでやってみましょう。その前に、たしかに、この条件を満足するものが何個あるか、数えるのは大変ですが、特定の一つを考えることはむずかしくはありません。

…問題２

Ｔ：　では、次に条件を満足する５ケタの整数が何個あるか、考えることにしましょう。そのために次のような図を考えます。

１番目	２番目	３番目	４番目	５番目
a	b	c	d	e

たとえば、５ケタの整数４５２１３は、

１番目	２番目	３番目	４番目	５番目
４	５	２	１	３

つまり、整数４５２１３をつくることは、

１番目の箱に　整数４　をいれる
２番目の箱に　整数５　をいれる
３番目の箱に　整数２　をいれる
４番目の箱に　整数１　をいれる
５番目の箱に　整数３　をいれる

と考えます。

Ｍ：はい。だから、これらの箱に、１，２，３，４，５の５つの数字を一つずつ入れて５ケタの整数をつくれば、それらは全部で

１番目	２番目	３番目	４番目	５番目	
a	b	c	d	e	
５ ×	４ ×	３ ×	２ ×	１	＝ １２０

通りできます。

Ｔ：　さきほどの条件を、この考え方でいいなおすと、

どの箱でも、箱の番号と中の数字が異なっている　…　（条件Ａ）

と表現できます。

Ｍ：　最初の問題は、

５つの箱と５つの数字で（条件Ａ）を満足するものが何通りできるか。

といいかえることができますね。

Ｔ：　そうです。これを

「長さ５の箱入れ問題」

と呼ぶことにします。

Ｍ：　最初の問題を、いいかえることができるのは、わかりました。でも、この「長さ５の箱入れ問題」の答えが何通りあるのかは、まだわかりません。

Ｔ：　まあまあ、あわてないで。これからです。

「長さ５の箱入れ問題」の答えは、さっき計算した１２０通りの中の一部です。そこで、反対にもし、１２０通りの中に

（条件Ａ）を満足しないもの

が何通りあるかがわかれば、（条件Ａ）を満足するものが何通りあるか求めることができます。

Ｍ：　それはわかります。

Ｔ：　（条件Ａ）を満足しない例は、以下のようなものがあります。

１番目	２番目	３番目	４番目	５番目
１	３	２	５	４

１番目	２番目	３番目	４番目	５番目
１	２	４	５	３

１番目	２番目	３番目	４番目	５番目
１	２	３	５	４

１番目	２番目	３番目	４番目	５番目
１	２	３	４	５

Ｍ：　たしかに、これらが「長さ５の箱入れ問題」において（条件Ａ）を満足しないことは見ればわかります。でもこのようなものが全部で何通りあるかわかりません。

Ｔ：　そうなんですが、上の４つの例は、（条件Ａ）を満足しないある意味での代表例になっています。よく見て考えてください。

Ｍ：　ええと、なるほどわかりました。何ヶ所で箱の番号と中の数字がいっちしているかをみると、たしかに代表例になっています。

１ヶ所で箱の番号と中の数字が同じ …　（１）

２ヶ所で箱の番号と中の数字が同じ …　（２）

３ヶ所で箱の番号と中の数字が同じ …　（３）

４ヶ所で箱の番号と中の数字が同じ …　（４）

Ｔ：　そうですね。上の分類で、

「５ヶ所で箱の番号と中の数字が同じ」

例がないのはなぜですか。

Ｍ：　それは、１番目が１で、２番目が２で、３番目が３で、４番目が４ならば、５番目は５しかなく、結局、５ヶ所で箱の番号と中の数字がいっちするからです。

Ｔ：　その通りです。

Ｍ：　でも、（４）の場合はたったの１つだけです。しかし、ほかの場合はそれぞれ何通りあるのか、わかりません。

Ｔ：　あせらずに、ひとつひとつ求めてみましょう。その目的のために、記号を決めます。

長さ５の箱入れ問題の答えは全部で $F(5)$ 通りできる

とかくことにします。

Ｍ：　まだ答えがわかっていないのに全部で $F(5)$ 通りあるといってしまうのですか。

Ｔ：　そうです。ここまでで、たしかなのは

$$1 < F(5) < 120$$

ことぐらいです。

Ｔ：　また、この記号を使えば、

長さ４の箱入れ問題の答えは $F(4)$ 通り

長さ３の箱入れ問題の答えは $F(3)$ 通り

長さ２の箱入れ問題の答えは $F(2)$ 通り

といえます。

ここで、$F(2)$、$F(3)$ は直接、簡単に求めることができますよ。

Ｍ：　ええと、$F(2) =$ 〈3-1〉、　$F(3) =$ 〈3-2〉 … **問題３**

Ｔ：　そうです。さて、４ページにもどって、そこの（１）の

１ヶ所で箱の番号と中の数字が同じ

例として、

１番目	２番目	３番目	４番目	５番目
2	1	4	3	5

を考えてみます。このように「５番目の箱の中の数字が５」である例は他にもあります。それは

１番目	２番目	３番目	４番目	５番目
a	b	c	d	5

とあらわせます。　ここで、a，b，c，dはそれぞれ１，２，３，４のいずれかであって、しかも（条件Ａ）を満足している。

このようなものは全部で $F(4)$ 通り

あります。

Ｍ：　ええと、５番目は５と決まっているから、結局、

「長さ４の箱入れ問題」

になるのですね。

Ｔ：　また、　「１ヶ所で箱の番号と中の数字が同じ」　他の例として、

１番目	２番目	３番目	４番目	５番目
a	b	3	c	d

を考えられます。ここで、a，b，c，dはそれぞれ１，２，４，５のいずれかであって、しかも（条件Ａ）を満足している。

このようなものも、 $F(4)$ 通りあります。

M：　そうですね、4ページの（1）は全部で、

$\boxed{\langle 4\text{-}1\rangle}\times F(4)$ …（5）　　　　　… **問題 4**

通りできることになりますね。

T：　そうです。1ヶ所だけ数字が一致するのは $\boxed{\langle 4\text{-}1\rangle}$ 種類あるので $\boxed{\langle 4\text{-}1\rangle}$ 倍することになります。

T：　次の場合もやってみましょう。4ページの（2）の場合です。

先ほどと同様に考えます。まず、

1番目	2番目	3番目	4番目	5番目
a	b	c	4	5

ここで、a，b，cはそれぞれ1，2，3のいずれかであって、しかも（条件A）を満足している。これは全部で $F(3)$ 通りあります。

M：　他の場合も、さっきと同じですね。例えば、

1番目	2番目	3番目	4番目	5番目
a	2	b	4	c

ここで、a，b，cはそれぞれ1，3，5のいずれかであって、しかも（条件A）を満足している。これも全部で $F(3)$ 通りあります。

でも、2ヶ所だけ数字がいっちするのは何通りあるか、わかりません。

T：　そんなことはありません。数えることができますよ。いまの例は2，4番目だけがいっちする場合でした。その他にも例えば、

1，2番目だけがいっち　←→　{1，2}

3，5番目だけがいっち　←→　{3，5}

などがあります。要するに、1，2，3，4，5のうち二つの数字を決めてそれが何組できるかを数えればよいのです。

M：　ええと、順番にかくと、

{1，2}

{1，3}

… …

{3，5}

{4，5}

だから全部で $\boxed{\langle 5\text{-}1\rangle}$ ですね。したがって、4ページの（2）の場合は全部で、

$\boxed{\langle 5\text{-}1\rangle}\times F(3)$ …（6）　　　　　… **問題 5**

となります。

T：　そうですね。次に、4ページの（3）の場合をやってみましょう。次のような例です

1番目	2番目	3番目	4番目	5番目
a	b	3	4	5

ここで、a，bはそれぞれ1，2のいずれかであって、（条件A）を満足している。

このようなものは全部で $F(2)$ 通りあります。

M：　上の例は、3ヶ所でいっちしている場合です。このような例が、いくつあるか、どうやって数えるのですか。

T：　こう考えたらどうでしょう。

いっちする場合		いっちしない場合
{1，2，3}	←→	{4，5}
{1，2，4}	←→	{3，5}
… …	… …	… …
{2，4，5}	←→	{1，3}
{3，4，5}	←→	{1，2}

この対応で考えます。

M：　なるほど、どちらを数えても同じか。

M：　したがって、４ページの（３）の場合は全部で、

$\boxed{\langle 6\text{-}1\rangle} \times F(2)$　…　（７）　… **問題６**

T：　これで、$F(5)$ は次のようになります。

$$F(5) = 120 - \left\{ \boxed{\langle 4-1\rangle} \times F(4) + \boxed{\langle 5-1\rangle} \times F(3) + \boxed{\langle 6-1\rangle} \times F(2) + 1 \right\}$$

…（８）

となります。

M：　（８）の式で $F(4)$ の値はまだわかりませんね。

T：　そうですね。$F(5)$のときの考え方をもちいて、

$$F(4) = \boxed{\langle 7-1\rangle} - \left\{ \boxed{\langle 7-2\rangle} \times F(3) + \boxed{\langle 7-3\rangle} \times F(2) + 1 \right\}$$

…（９）

これを使えば、$F(5)$ の値を求めることができます。 … **問題７**

M：　なかなか大変でした。

T：　そうでしたか。では、別の数え方を考えましょう。

まず、箱３つと数１，２，３で、

１番目	２番目	３番目
1	a	b

を考え、a，b には条件なし。これは何通りありますか。

M：　２通りです。

T：　同じように

１番目	２番目	３番目
a	2	b

１番目	２番目	３番目
a	b	3

もそれぞれ２通りです。

そこで、次のような記号を決めます。

箱１，２，３に数１，２，３を一つずつ入れるとき、

１番目に１を入れ、他は自由に条件なしで入れる

このような入れ方を(①,2,3)とかく。また、このような場合を全部で N(①,2,3)通りあるとかくことにします。

同じように、(1,②,3)、(1,2,③)とかき、

N(1,②,3)、N(1,2,③)

もきめる。

M：　この記号を使うと、

N(①,2,3) ＝ 2

N(1,②,3) ＝ 2

N(1,2,③) ＝ 2

ですね。　これと「長さ３の箱入れ問題」がどうつながるのですか。

T：　そのために、

N(①,2,3) ＋ N(1,②,3) ＋ N(1,2,③) ＝ 6

をよくみると、

(①,2,3) の中には

(①,②,3)

(①,2,③)

の場合が入っていますね。

M：　わかります。同じように、

(1,②,3) の中には

(①,②,3)

(1,②,③)

の場合が入っています。また、

(1,2,③) の中には

(①,2,③)

(1,②,③)

の場合が入っています。

T：　そうですね。これをみると、

(①,②,3)，(①,2,③)，(1,②,③)

は多く数えられているので、その分をひき、

N(①,2,3) + N(1,②,3) + N(1,2,③)

− [N(①,②,3) + N(①,2,③) + N(1,②,③)]

= 6 − (1 + 1 + 1) = 3

さらに、

(①,2,3)，(1,②,3)，(1,2,③)

(①,②,3)，(①,2,③)，(1,②,③)

においては、それぞれ、(①,②,③) の場合を含んでいるので

N(①,2,3) + N(1,②,3) + N(1,2,③)

− [N(①,②,3) + N(①,2,③) + N(1,②,③)]

の計算は、(①,②,③) の場合がなくなっています。そこで、

N(①,2,3) + N(1,②,3) + N(1,2,③)

− [N(①,②,3) + N(①,2,③) + N(1,②,③)]

+ N(①,②,③)

= 6 − (1 + 1 + 1) + 1 = 4

この最後の4通りは何ですか。

M：　ようするに、3ヶ所のうちで、1ヶ所でもいっちしている場合の数ですね。実際に、3ケタの整数でかけば、

<8-1>

の4通りです。

T：　そうです。したがって、

F(3) = [<8-2>] − [<8-3>] … **問題 8**

また、この考え方で F(5) なども求めることができます。

すなわち、

F(5) = 5×4×3×2×1 − { N(①,2,3,4,5) + N(1,②,3,4,5,6)

+ N(1,2,③,4,5) + N(1,2,3,④,5) + N(1,2,3,4,⑤) }

+ { N(①,②,3,4,5) + N(①,2,③,4,5) + ⋯ +

+ ⋯ + N(1,2,③,4,⑤) + N(1,2,3,④,⑤) }

− { N(①,②,③,4,5) + N(①,②,3,④,5) + ⋯ +

+ ⋯ + N(1,②,3,④,⑤) + N(1,2,③,④,⑤) }

+ { N(①,②,③,④,5) + N(①,②,③,4,⑤) + ⋯

+ N(①,2,③,④,⑤) + N(1,②,③,④,⑤) }

− N(①,②,③,④,⑤)

M：　目が回りそうです。なにやら、たしすぎた部分を引き、引きすぎた部分をたし、といったことくり返していることはわかりますが、式のとちゅうで、…の部分で省略されているところもあって、よくわかりません。

T：　そうですね。計算式のそれぞれの部分は、初めに F(5) を求めた考え方がつかえ、もとめることができます。しかし、細かくみてゆくと大変ですし、時間もかかるので、この考え方はここまでとしましょう。

　では最後に、第3の方法を説明しましょう。

M：　まだあるのですか。

T：　はい。今度は、全く別の考え方です。それで $F(8)$ を求めてみましょう。先ほどの図を簡単に次のようにかきます。

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
a	b	c	d	e	f	g	h

ここで、 a, b, c, d, e, f, g, h は 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 のいずれか一つで、さらに、（条件Ａ）を満足する。

M：　ここまでは、 $F(5)$ の場合と同じですね。

T：　そうですね。ここからです。⑧に入る数字ｈは（条件Ａ）を満足するから、１，２，３，４，５，６，７の７通りあります。

たとえば、⑧のｈが４であったとしましょう。

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
a	b	c	d	e	f	g	4

ここで、ａ，ｂ，ｃ，ｄ，ｅ，ｆ，ｇは１，２，３，５，６，７，８のいずれか一つの数になり、かつ（条件Ａ）を満足する。

今、数８が④に入る場合と入らない場合に分けて考えます。

Ⅰ．数８が④に入る場合（すなわちｄ＝８の場合）

この場合、ａ，ｂ，ｃ，ｅ，ｆ，ｇは１，２，３，５，６，７のいずれか一つで、かつそれらが（条件Ａ）を満足しているのであるからその総数は 〈9-1〉 です。

Ⅱ．数８が④に入らない場合（すなわちｄ≠８の場合）

この場合、数８は④に入ることができないので、数 〈9-2〉 と同じ制限をうけます。

したがって、数８を数 〈9-2〉 に書き換えて考えれば、この場合の総数は 〈9-3〉 となります。

以上から、⑧のｈが４であるとき、（条件Ａ）を満たす場合は全部で

（ 〈9-1〉 ＋ 〈9-3〉 ）通りあります。

ｈ＝１，２，３，４，５，６，７の７通りの場合があるので、

$F(8)$ ＝ ７×（ 〈9-1〉 ＋ 〈9-3〉 ）

ここまでの考え方と同じ方法を利用して、

$F(7)$ ＝ ６×（ 〈9-4〉 ＋ 〈9-5〉 ）

$F(6)$ ＝ ５×（ 〈9-6〉 ＋ 〈9-7〉 ）

$F(5)$ ＝ ４×（ 〈9-8〉 ＋ 〈9-9〉 ）

$F(4)$ ＝ ３×（ 〈9-10〉 ＋ 〈9-11〉 ）　　… 問題９

M：　この方法は、初めの２つの方法にくらべて、段階的に値を求めることができるので、計算はめんどうですが便利ですね。

T：　そうですね。一つの問題を色々な方向から考えることは、数学では大切なことです。

M：　とても長くて大変でした。　　… 問題１０

T：　そうですね。

今日の問題をパソコンで計算すると、おもしろいことが色々ありますが時間もなくなりましたので、また別の機会にお話をしましょう。

M：　はい。楽しみにしています。

T：　今日はこれで終わりです。

M：　どうもありがとうございました。

１９９８年　問　題

［問題１］　資料文の問題１にある空らん<1-1>と<1-2>に適切な数字を入れなさい。

［問題２］　この条件を満足する５ケタ整数のうちで最小の数を求めよ。

［問題３］　資料文の問題３にある空らん<3-1>と<3-2>に適切な数字を入れなさい。

［問題４］　資料文の問題４にある空らん<4-1>に適切な数字を入れなさい。

［問題５］　資料文の問題５にある空らん<5-1>に適切な数字を入れなさい。

［問題６］　資料文の問題６にある空らん<6-1>に適切な数字を入れなさい。

［問題７］　資料文の問題７にある空らん<7-1>から<7-3>に適切な数字を入れなさい。また、$F(4)$、$F(5)$ の値を求めなさい。

［問題８］　資料文の問題８にある空らん<8-1>に適切な４つの３ケタの整数を全て書き入れなさい。また、<8-2>と<8-3>に適切な数字を入れなさい。

［問題９］　資料文の問題９にある空らん<9-1>から<9-11>に適切な記号を入れなさい。ただし、<9-2>には適切な数字を入れなさい。

［問題10］　８組の男女（男８人、女８人の合計１６人）があるパーティで男女１人ずつ２名１組で、ダンスをする。以下の問に答えよ。
なお、解答は計算が大変なので、資料文にある記号と式、および次の記号を使って答えよ。

$$5\times4\times3\times2\times1=5!$$
$$4\times3\times2\times1=4!$$

他に、7!、6!なども同様な意味で使う。

（１）組み合わせ可能なダンスの組は全部で何通りできるか。

（２）１回目にダンスをした８組の男女に対して、その後、組み合わせを勝手につくった、２回目のダンスで、どの組でも、相手が１回目と違う確率を求めよ。

（３）８人の女性には８人の男性の中に好きな人が１人だけいる。さいわいなことに、１人の男性を二人以上の女性が好きになっていることはない。さて、組み合わせを勝手につくった、３回目のダンスで、８人の女性のうちの少なくとも１人の女性は、自分の好きな相手とおどれる確率を求めよ。