2001年度

国際基督教大学高等学校入学試験問題

数　学

注　意

1．この試験は資料文とそれに続く問題とで構成されています。資料文を読みすすめながら，対応する問題に答えてゆくのがよいでしょう。

2．資料文や，問題に，自由に書き込んでかまいませんが，解答は全て，解答用紙に記入して下さい。

3．この試験時間は，12時50分から2時00分までの70分間です。

4．その他の要領は，他の科目の試験と同様です。

受験番号	G J	氏名	

G，Jのいずれかをマルで囲んでください。

資　料　文

姉のさちこさんは都内の高校に通う３年生、とても繊細な女の子です。

弟の昇平くんはこの春、高校に入学したばかり、さっそく山岳部に入った野性的な性格。二人の対話でこの物語は進みます。

＜プロローグ＞

さちこ「昇平、いま忙しい？」

昇平　「ああ、あしたから先輩たちと北アルプスに登るんで、その準備さ。いいぞー、夏山は。」

「ちょっと手伝ってほしいことがあるんだけど、悪いからいいわ。」

「まあ、そういわないで話してごらんよ、さちこさん。」

「うちの高校ね、夏休みのレポートがあるの。教科も課題も自由、レポートの枚数も決められていないの。しかも強制されるわけじゃないから、提出する、しないも本人の自由。もちろん成績にも関係しないわ。とにかく自分で学習し、学んだことをレポートにまとめればいいのよ。」

「へえー、サコの高校って変わってるんだね。受験に忙しい３年生でやるヤツなんていないだろ？」

「だから、やるんじゃないの！　高３の夏休み、後でふり返ったとき、わたしはこれをやったんだわといえるようなものを残したいのよ。」

「で、どんなことやるつもり？」

「そうねー、図書館に通って資料を調べたり、インターネットで情報を集めたりする人が多いけど、わたしは使うのは紙とエンピツだけ、あとは自分の頭で考えるという数学がいいわ。で、ここに古い数学の雑誌があるんだけど、とっても興味あることが書いてあるの。いい、ちょっと読んでみるわよ。……」

＜Act Ⅰ；問題の提示とフィボナッチの解答＞

『算板の書』で有名になったフィボナッチに、ドイツのフリードリッヒ２世が1225年にピサを訪れたとき数学の試合を申しいれた。そしてフリードリッヒ２世につかえていた哲学者パレルモのマギストル・ヨハンがフィボナッチに問題を提出した。

＜フィボナッチに出された問題＞

x^2+5 および x^2-5 をともに平方数とするには、x をどんな数にすればよいか。

フィボナッチはただちに解 $x=\dfrac{41}{12}$ をみつけた。かれは x, y, z についての方程式 $x^2+a=y^2$, $x^2-a=z^2$ は、$a=4mn(m+n)\times(m-n)$ と表される場合に m, n が整数であれば、整数の解をもつことを示したⒶ。$4mn(m+n)(m-n)$ は24でわりきれるからⒷ、$5\times12^2=720=4\times5\times4\times(5+4)(5-4)$ をつかって、$m=5$, $n=4$, $m^2+n^2=41$ となるので、$41^2+5\times12^2=49^2$, $41^2-5\times12^2=31^2$ がでてきたⒸ。

＜Act Ⅱ；問題の解釈＞

昇平「たったそれだけ？」

さちこ「そうよ。」

「何だかあっけないな。それに『ただちに解 $\dfrac{41}{12}$ をみつけた』なんてカワイくないヤツだね。」

「天才って、そういうものよ。」

「ウーン、それにしてもこれだけじゃ、さっぱりわからないなー。」

「ねえ、昇ちゃん、これってまるでテレビの『刑事コロンボ』を見てるようじゃない？　まず事件の犯人と犯行の手口が最初に視聴者に明か

される。そしてコロンボ刑事が登場し、わずかな手がかりをもとに推理を重ね、犯人を追いつめてゆくという……。昇ちゃん、あんたコロンボ好きだったじゃない？」

「ウン、けっこうスリルがあるね。」

「まず $\frac{41}{12}$ が求める数xだというのは、昇平どうしてだと思う？」

「記事のおわりにある下線部Ⓒ、$41^2+5\times12^2=49^2$,
$41^2-5\times12^2=31^2$ が成り立つから、$x=\frac{41}{12}$ とすれば、

$x^2+5=($①$\boxed{\quad})^2$, $x^2-5=($②$\boxed{\quad})^2$

となるからだろう？　確かに x^2+5, x^2-5 はともに平方数になるよ。」　――〔問１〕

「でもね、昇平、ふつう平方数っていうのは整数のことじゃない？この問題には整数の解はないのかしら？」

「あったらきっと、フィボナッチがみつけているよ。」

「だったら、整数解はないってことをわたしたちで証明できないかしら？　それにはえーと、

$$x^2+5=y^2,\ x^2-5=z^2\ (ただし0<z<x<y)$$

とおいてx, y, zが整数となることがあるかを調べればいいわ。」

「$y^2-x^2=5 \Rightarrow (y+x)(y-x)=5$ これからもし、x, yが正の整数だとすれば、$y+x=$③$\boxed{\quad}$, $y-x=$④$\boxed{\quad}$ また $x^2-z^2=5$ $\Rightarrow (x+z)(x-z)=5$ 同じようにx, zが正の整数だとすれば、$x+z=$⑤$\boxed{\quad}$, $x-z=$⑥$\boxed{\quad}$ したがって、はじめの方程式からは $x=$⑦$\boxed{\quad}$, $y=$⑧$\boxed{\quad}$、あとの方程式からは $x=$⑨$\boxed{\quad}$, $z=$⑩$\boxed{\quad}$ だからこれらが同時に成り立つことはない。ということは、x^2+5, x^2-5をともに平方数とするような正の整数xは存在しない！」　――〔問２〕

「それで、フィボナッチは分数の解をみつけたのね。ふぅー、第１関門突破。」

＜Act Ⅲ；フィボナッチはいかにして解 $\frac{41}{12}$ をみつけたか＞

昇平「ところでさあサコ、記事には『aがある条件をみたす数のとき、方程式 $x^2+a=y^2$, $x^2-a=z^2$ は整数の解x, y, zをもつことを示した』とあるけど、どうしてフィボナッチは具体的な数5をわざわざ一般的な文字、aとしたのかな？　かえってむずかしくなっちゃったんじゃない？」

さちこ「$x^2+5=y^2$, $x^2-5=z^2$ では整数解をもたないから、5のかわりにaとおいて、aがどのような条件をみたすとき、方程式$x^2+a=y^2$, $x^2-a=z^2$は整数解をもつか　というふうに問題を立てかえてみたのよ。」

「それで何かわかるの？」

「ええ、それではじめの問題が解けたんじゃないかしら。

$$a=5k^2\ (kは整数)$$

と表されたとして、方程式 $x^2+5k^2=y^2$, $x^2-5k^2=z^2$ の整数解 x, y, zをみつけることができれば、昇ちゃんがはじめに確かめてくれたように、この２つの式の両辺をk^2でわって

$$\left(\frac{x}{k}\right)^2+5=\left(\frac{y}{k}\right)^2,\ \left(\frac{x}{k}\right)^2-5=\left(\frac{z}{k}\right)^2$$

となるでしょう？　だから、はじめの問題の解が得られるのよ。」

「ウーン、すごい構想だなー。800年も前にこんなアイディアを思いつくなんて、数学者の頭の中ってどうなってるの？」

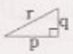
「でも、これは数学ではよくやることなのよ。『問題を一般化する』っていうんだけど。この場合は、一般化してみることで、整数の平方数の問題に帰着できることが見えてきたわけね。」

「ふーん、『問題が解けなければ、一般化して考えてみよ』か、この考え方は数学に限らず、幅広く応用できそうだね。」　──〔問３〕

＜Act Ⅳ；ピタゴラス数の求め方＞

さちこ「ところで、整数の平方数の問題といえば、思い出すものがあるわ。昇平、ピタゴラス数ってきいたことある？」

昇平　「ピタゴラスの定理なら知ってるけど……。もっとも中学校じゃ、三平方の定理って習ったけどね。」

「それよ。直角三角形 

について、$p^2+q^2=r^2$ が成り立つけど、この等式をみたす正の整数の組（p，q，r）をピタゴラス数とよぶの。」

「直角三角形の３辺の長さがすべて整数となる場合か。(3，4，5）がそうだね。」

「他には？」

「(6，8，10)，(9，12，15)，(12，16，20)，……」

「そんなのつまらないわ、あたりまえだもの。」　──〔問４〕

「サコ、他にも知ってるの？」

「ええ、知ってるわよ。たとえば、$5^2+12^2=169=13^2$ だから（5，12，13)」

「なるほど、(5，12，13）は（3，4，5）とは独立だね。」

「実はこのように互いに独立なピタゴラス数は無限にあるのよ。しかもそれらはすべて、たった１つの式から生み出されるわ。」

「へぇー、そいつはおどろきだな。」

「ユークリッドとその同時代の人々（紀元前300年頃）は等式、

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=\left(\overset{⑪}{\boxed{\quad}}\right)^2 \cdots\cdots \text{(i)}$$

によって、ピタゴラス数はみつけ出すことができることを知っていたそうよ。たとえば、(i）の等式において $m=2$，$n=1$ とすれば、

$3^2+4^2=5^2$ となるから、(3，4，5）がみつかるでしょう？」　──〔問５〕

「よし、$m=4$，$n=1$ としてみよう。なるほど、また独立なピタゴラス数、($\boxed{\quad}$，$\boxed{\quad}$，$\boxed{\quad}$）がみつかるね。でも、ピタゴラス数とフィボナッチの問題がどうつながるんだい？」　──〔問６〕

＜Act Ⅴ；２つの補題＞

さちこ「まああわてないでよ、昇平。コロンボは誰もが見落としてしまう（犯人さえ気がつかない）ような小さな手がかりを発見して、事件を解決してゆくけど、わたしたちの問題では、２つの重要な手がかりが与えられているじゃない。」

昇平　「ウン、記事の中の下線部Ⓐと下線部Ⓑがそれだろう？」

「そうよ。あのね、問題を解くときに補助的につかう定理のことを補題というのよ。わたしの数学の先生が好んでつかう言葉なの。だから、わたしたちもこの２つをそれぞれ補題１、補題２とよぶことにしましょうよ。」

「それはいいけど、補題１の文章は何だかわかりにくいな。」

「いいわ、もうちょっと整理してみましょう。……」

〔補題１〕

> m，nを正の整数として、$a=4mn(m+n)(m-n)$ とおく。ただし $m>n$ とする。このとき、方程式 $x^2+a=y^2$，$x^2-a=z^2$ は整数解x，y，zをもつ。

「ウン、これならよくわかるよ。」

「そこで、さっきのピタゴラス数の求め方の等式（i）が役立つわけよ。まず等式（i）で、

$$p = m^2 - n^2,\ q = 2mn,\ r = \boxed{⑪}$$

とおいてみましょう。すると、

$$p^2 + q^2 = r^2 \cdots\cdots \text{(ii)}$$

が成り立つわね。」

「アレ、補題1のaの値はサコのp, qで表されるよ。

$$a = \boxed{⑫\quad}$$

だろ。」 ——〔問7〕

「昇平、すごいじゃない。よく気がついたわ。それで何だか全体が見えてきたような気がするわ。」

「オレにはまだ何も見えないけど……」

「あのね、等式 (ii) の両辺に $\boxed{⑫} = a$ を加えてごらんなさい。」

「えーと、$p^2 + q^2 + \boxed{⑫} = r^2 + a$ あ、そうかー、これから

$$r^2 + a = \left(\boxed{⑬\quad}\right)^2 \cdots\cdots \text{(iii)}$$

となるね。」

「じゃあ今度は、(ii) の両辺から $\boxed{⑫} = a$ を引いてみれば？」

「$p^2 + q^2 - \boxed{⑫} = r^2 - a$ となるから、

$r^2 - a = \left(\boxed{⑭\quad}\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (iv)」 ——〔問8〕

「この結果から、(iii), (iv) の等式のp, q, rをm, nにもどしてみると

$$\begin{cases} \left(\boxed{⑪}\right)^2 + 4mn(m+n)(m-n) = \left(\boxed{⑮\qquad\qquad}\right)^2 \\ \left(\boxed{⑪}\right)^2 - 4mn(m+n)(m-n) = \left(\boxed{⑯\qquad\qquad}\right)^2 \end{cases} \cdots\cdots \text{(v)}$$

という式が得られたわけね。この関係式はピタゴラス数の求め方の式から出発しなければ、とても引っぱり出せなかったわね。」 ——〔問9〕

「そうかあー、やっとオレにも見えたよ、サコの言ってたことが。

m, nは整数だったから、$a = 4mn(m+n)(m-n)$ のとき、この2つの式が補題1の方程式の整数解x, y, zを与えるわけだ。」

「そうなの。あとは整数m, nをどのように決めるかだけど、ともかくこれで補題1は証明できたわ。ちょっとつかれたわね。紅茶でもいれてくるわ。」

(数分後)

「おまたせ、昇ちゃんの好きなシナモンティーよ。」

「サンキュー。サコがお茶をいれてる間に、もう1つの補題はだいたい証明できたよ。」

〔補題2〕

$a = 4mn(m+n)(m-n)$ は24でわりきれる。

「えーと、これを示すには $mn(m+n)(m-n)$ が $\boxed{⑰\quad}$ の倍数であることをいえばいいのね。」 ——〔問10〕

「まず $mn(m+n)(m-n)$ が2の倍数であることは、つぎのようにしていえるよ。m, nのうち少なくとも一方が偶数のとき、mnは2の倍数。したがって $mn(m+n)(m-n)$ も2の倍数。またm, nともに $\boxed{\quad}$ の場合は $m+n$ は偶数。だから $mn(m+n)(m-n)$ も偶数。」 ——〔問11〕

「それで、すべての場合に $mn(m+n)(m-n)$ は2の倍数であることがいえたわね。だからあとは、$mn(m+n)(m-n)$ が $\boxed{⑱\quad}$ の倍数であることを示せば終りね。」 ——〔問12〕

「m, nのうち少なくとも一方が $\boxed{⑱}$ の倍数であるときは、それ以上何もいうことはないから、問題ないだろう？」

「ええ、そこでm, nがいずれも $\boxed{⑱}$ の倍数ではない場合を考えればいいのね。これはわたしにやらせて。えーと、3つの場合に分けて、まずm, nともに $\boxed{⑱}$ でわって1余るとき、m, n, m＋n, m－n

の4数のうち ⑲［　　］ は ［⑱］ の倍数となるわ。つぎにm, nともに［⑱］でわって2余るときも同じことね。やはり［⑲］が［⑱］の倍数。そして最後に、m, nをそれぞれ［⑱］でわったとき、一方が1余り、他方が2余る場合、今度は4数のうち ⑳［　　］ が［⑱］の倍数。」　――〔問13〕

「だから　mn(m＋n)(m－n) は［⑰］の倍数であることがいえて、$a=4mn(m+n)(m-n)$ は24でわりきれることが示された。」

＜Act Ⅵ；問題の最終解決＞

昇平　「残された問題は、はじめにサコが言ったように

$$a=5k^2$$

と表されるような整数kをみつけて、そのときのm, nの値を求めることだね。」(Act Ⅲ参照)

さちこ「ええ、$a=4mn(m+n)(m-n)$ とも表されなくちゃいけないから

$$5k^2=4mn(m+n)(m-n)$$

となるわ。kがあまり大きな数だとm, nの値が求めにくくなるから、kはできるだけ小さな数にしたいわね。」

「そうか、ここで補題2がきいてこないかな。右辺の数は補題2から24の倍数だろ？　ということは、k^2が24の倍数でなければいけないよ。」　――〔問14〕

「そうね、それなら $k^2=24\ell$ とおいて、kの値を小さくしたいから、24ℓが平方数となるような最小の整数ℓをみつければいいのね。」

「24を素数の積に分解してみると、$24=2^3\times3$となるから、24ℓを平方数とする最小の整数ℓは6だ！」　――〔問15〕

「すごいわね、昇平。すると $k^2=24\times6=144=12^2$ だから $k=12$ このとき a は、$a=5k^2=5\times12^2=720$　やっとaが求められたわね。」

「そうすると、$a=4mn(m+n)(m-n)$ だったから

$$720=4mn(m+n)(m-n)$$

となるのか。これで、はじめの記事にあった式の意味がわかったよ。

$$720=4\times5\times4\times(5+4)(5-4)$$

となって、$m=5,\ n=4$だ。やった！　ついにフィボナッチの秘密をあばいたぞ。」

「まだダメよ、昇平。そんな推理じゃ、コロンボは犯人を追いつめられないわ。」

「どうしてさ？」

「$720=4mn(m+n)(m-n)$ だから4でわって、$180=mn(m+n)\times(m-n)$ となるけれど、180を4つの整数の積に分解する仕方は$5\times4\times9\times1$の他にもたくさんあるでしょう？　だとすれば、$m=5,\ n=4$以外にも解があるかもしれないじゃないの。」

「なるほど、さっきの推理は『彼が犯人だとすれば、すべてつじつまが合う』ということで、逆の『すべての証拠から、犯人は彼だ』とはまだいえないってことか。チェッ、せっかく解けたと思ったのに。見直しましたよ、さちこさん。」

「さあ、あと一歩のところまできたわ。」

「そうはいっても、分解の仕方は

$$180=2\times2\times5\times9=2\times3\times3\times10=2\times3\times5\times6$$

みたいにいくらでもあるからなあ。」

「でもね、いま昇平がやったような『同じ数を2度つかう分解』や『1をつかわない分解』は許されないんじゃないかと思うわ。」

「へえー、どうしてさ？」

「4つの正の整数m, n, m＋n, m－nの大小関係を調べたらどうかしら。n＜mは、はじめの仮定だし、m－n＜m＜m＋nも明らかだ

から、いちばん小さいのはnかm－nのどちらかね。」

「もしかしたら、n＝m－n　かもしれないよ。」

「そうね。じゃ、$\underline{n \leqq m-n}$だと仮定してみましょう。移項すると $2n \leqq m$　両辺にnをかけて $\underbrace{2n^2 \leqq mn}_{㋐}$ また $2n \leqq m$ の両辺にnをたし $\underbrace{3n \leqq m+n}_{㋑}$ すると㋐、㋑より $(2n^2)(3n) \leqq (mn)(m+n)$ $\Rightarrow 6n^3 \leqq mn(m+n)$ ここで$\boxed{\qquad}$だったから $6n^4 \leqq mn(m+n)(m-n)$ となるでしょう？」──〔問 16〕

「うん、右辺の数は180だったから $6n^4 \leqq 180 \Rightarrow n^4 \leqq 30$ ここで $n=3$とすると$n^4=81$となってしまうから$n \leqq 2$。だから$n=2$ または$n=1$」

「そこで$n=2$とすれば、$180=mn(m+n)(m-n)=2m(m+2)\times(m-2) \Rightarrow 90=(m-2)m(m+2)$ でも、これはありえないわ。」

「どうしてさ？」

「だって、90は $1\times3\times5$ や $2\times4\times6$, $3\times5\times7$ のような $\underline{\text{1つとびの3整数の積にはならないもの。}}$」

「なるほど、$2\times4\times6=48$, $3\times5\times7=105$だものね。すると$n=1$のときは、$180=m(m+1)(m-1)=(m-1)m(m+1)$ となるけど、ああ、これもありえないな。」──〔問 17〕

「だとすると、$n \leqq m-n$とした仮定がまちがっていたことになるでしょう？　だから$n > m-n$　つまり　$m-n$がいちばん小さい数で、$m-n<n<m<m+n$ということがいえるわ。」

「そうなると、4つの整数はすべて異なるわけだ。だから『同じ数を2度つかう分解』は許されない。あとは『1をつかわない分解』についてか……。1をつかわない分解の1つとして$180=2\times3\times5\times6$があるけれど、この他にもありそうな気がするな。」

「ところが、その他にはないのよ。2, 3, 5はもう分解できないから、可能性としてはその4つの因数の中で、$6=2\times3$の2と3のどちらか一方を他の因数にくりこませる場合だけど、どちらにしてもだめでしょう？　だって、2と3のどちらを他の因数にくりこませても$\boxed{\qquad\qquad}$もの。」──〔問 18〕

「じゃあ、$180=2\times3\times5\times6$はなぜだめなの？」

「$m-n$, m, $m+n$の3数は等間かくで並ぶでしょう？　なのに2, 3, 5, 6ではどの3数も等間かくには並んでいないわ。」

「お見事！　それで、『1をつかわない分解』も許されないんだね。すると $180=mn(m+n)(m-n)$ において$m-n$が最小だったから、$m-n=$㉑$\boxed{\quad}$か。このとき、4つの因数を小さい順に並べなおすと、

$$180=(m-n)\times n\times m\times(m+n)$$
$$=\boxed{㉑}\times(m-1)\times m\times(2m-1)$$
$$=\boxed{㉑}\times{}^{㉒}\boxed{\quad}\times{}^{㉓}\boxed{\quad}\times{}^{㉔}\boxed{\quad}$$

ゆえに$m=$㉕$\boxed{\quad}$, $n=$㉖$\boxed{\quad}$。やっとできたぞ！」──〔問 19〕

「このm, nの値を等式 (v) に入れて、フィボナッチは記事にある下線部Ⓒの結果を得たのね。$m=\boxed{㉕}$, $n=\boxed{㉖}$しかないとつめてゆくところは『刑事コロンボ』のクライマックスを見るみたいだったじゃない？」

<エピローグ>

さちこ「昇平、手伝ってくれてありがとう。おかげで、いいレポートが書けるわ。全体をふり返ってみると、問題を解くためにフィボナッチが立てた基本構想は、方程式 $x^2+5=y^2$, $x^2-5=z^2$ は整数解をもたないので、$x^2+a=y^2$, $x^2-a=z^2$と一般化した方程式を考えて、$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$、と問題をとらえ直したことね。」──〔問 20〕

昇平　「いい数学をするには、構想を立てることが大事なんだね。」

「ところで記事にはこんなことがつけ加えてあるわ。$a=5$のとき方程式 $x^2+a=y^2$, $x^2-a=z^2$ は無限に多くの分数解をもつけれど、

フィボナッチ以来、他の解がなかなかみつからなかったんですって。ところが1931年になって、アメリカのヒルという人がとうとうみつけた解は

$$\left(\frac{3344161}{1494696}\right)^2+5=\left(\frac{4728001}{1494696}\right)^2$$

$$\left(\frac{3344161}{1494696}\right)^2-5=\left(\frac{113279}{1494696}\right)^2$$

さらにつぎの解は、コンピューターによって発見されたもので、分子が27ケタの既約分数になるらしいわ。」

「やっぱりコンピューターってすごいな。」

「コンピューターの発達もたいしたものだと思うけど、わたしは800年前の数学者、フィボナッチの構想力の中に人間の頭脳の可能性を感じるわ。」

「同感だな。ところでサコ、信州のおみやげ何がいい？」

「そうねえー、北アルプスの湧き水がいいわ。」

―おしまい――

〔参考文献〕1. 雑誌＜数学セミナー増刊号；100人の数学者＞（1971年12月）
――フィボナッチの項――

2. まんが雑誌＜COM＞（1969年9月号）
さちこさんと昇平くんの対話は＜COM＞に掲載された樹村みのりさんの作品『おとうと』の登場人物をイメージして作られました。

2001年度　問　　題

［問1］　空らん①、②を分数でうめなさい。

［問2］　空らん③～⑩をうめなさい。

［問3］　ここで問題を一般化する　とは、どのようなことをさしているか。つぎの（ア）～（オ）の中からもっとも適切なものを1つ選びなさい。

（ア）一部の専門家にしか理解できないような問題を、一般の人にも理解できるようにわかりやすくいいかえること。

（イ）その問題に対して、一般的によく知られている公式をつかえるようにすること。

（ウ）問題がむずかしすぎるので、もう少し一般的な問題にゆるめて解きやすくすること。

（エ）問題の特殊性に目をうばわれて、かえって問題の本質が見えにくくなっている場合があるので、問題をもう少し一般の場合に設定しなおして、問題の核心をとらえようとすること。

（オ）個別の実例をいくつか調べて、一般にどんな結論が導き出せるか予想を立てること。

［問4］　なぜ、あたりまえなのか？　図形の言葉を用いて、簡潔に答えなさい。

［問5］　空らん⑪を m，n を用いてうめなさい。

［問6］　3つの空らんをうめなさい。

［問7］　空らん⑫を p，q を用いてうめなさい。

［問8］　空らん⑬、⑭を p，q を用いてうめなさい。

［問9］　空らん⑮、⑯を m，n を用いてうめなさい。

［問10］　空らん⑰をうめなさい。

［問11］　空らんを適切な言葉でうめなさい。

［問12］　空らん⑱をうめなさい。

［問13］　空らん⑲、⑳をうめなさい。

［問14］　なぜ、k^2 は24の倍数でなければいけないか？
簡潔に答えなさい。

［問15］　どのようにして、昇平くんは $\ell = 6$ をみつけたか？
$24\ell = (2^3 \times 3)\ell$　を利用して答えなさい。

［問16］　空らんを適切な式でうめなさい。

［問17］　なぜありえないのか、簡潔に答えなさい。

［問18］　空らんを適切な文章でうめなさい。

［問19］　空らん㉑から㉖を数値でうめなさい。

［問20］　空らんに入れる文章として、もっとも適切なものはどれか？　つぎの（ア）～（オ）の中から1つ選びなさい。

（ア）$a = 5k^2$（k は整数）と表される場合に、この方程式の整数解 x，y，z をみつければよい

（イ）$a = 5k^2$ と表されるような整数 k の最小値をみつければよい

（ウ）180を4つの整数の積に分解すればよい

（エ）$a = 4mn(m+n)(m-n)$ と表される場合に、この方程式は整数解をもつ

（オ）$a = 4mn(m+n)(m-n)$ は24の倍数である