撹乱(完全)順列(derangement)と極限

Problem.

英単語n個とそれらの意味n個がある。それらを無作為に合わせたときに、n個中k個の単語がその語の意味と正しく組み合わされている確率を求めよ。また、nを無限大にしたときのその確率の近づく値を求めよ。

Solution:

英単語を1語ずつ黒いカードに、それらの意味を1つずつ白いカードに書く。英単語とその語の意味が書かれたカード(黒と白のカード1枚ずつ)を1組とみなすと、n組のカードがある。組にしたまま、それぞれの組に1からnまでの番号を順にふっていく。(番号はカードに書かれているものとする)

まず、黒のカードを番号順に横一列に並べて置く。次に、白のカードを無作為に並べかえた後、先に並べた黒カードの上に、1枚ずつ重ねて置いていく。いま、そのようにしてできた重ねられた黒白のカードn組のうち、黒と白それぞれのカードに書かれた数が互いに一致する組がk組あるような並べ方の場合の数を$U_{n,k}$とおく。

また、無作為にこの操作を行ったときに、n組中k組が一致している確率を$P_{n,k}$とおく。

まず$k=0$のとき、つまり$U_{n,0}$について考える。
黒の1の上に2がのっているとする。

(i) 黒の2の上が白の1である場合

黒: 1 2 3 4 … n
白: 2 1 [ ]
3〜nまで n-2枚

上図から明らかな通り、このような並べ方は$U_{n-2,0}$通りある。

(ii) 黒の2の上が白の1でない場合

黒: 1 2 3 4 … n
白: 2 [ ][ ]
1以外　n-2枚

白の1は黒の2の上には来てはいけないという意味で、白の1と白の2は同等に扱える。
したがって、このような並べ方は$U_{n-1,0}$通りある。

No.

Date

白の2, 白の3, …, 白のnのカードの対等性より、以上の(i)、(ii)の議論は、黒の1の上に白の3、白の4, …, 白のnがのっている場合についても成り立つ。

これにより、

$U_{n,0} = (n-1)(U_{n-1,0} + U_{n-2,0})$ …①

①の隣接三項間の漸化式を隣接二項間の漸化式に書き換える。

① $\Leftrightarrow$ $U_{n,0} - nU_{n-1,0} = -\{U_{n-1,0} - (n-1)U_{n-2,0}\}$ $(n \geqq 4)$

$\therefore U_{n,0} - nU_{n-1,0} = (-1)^{n-3}\{U_{3,0} - 3U_{2,0}\}$

($U_{3,0} = 2$, $U_{2,0} = 1$ であるので)

$= (-1)^{n-2}$

$= (-1)^{n}$

$\therefore U_{n,0} = nU_{n-1,0} + (-1)^{n}$ $(n \geqq 3)$ …②

ここで、$P_{n,m} = \dfrac{U_{n,m}}{n!}$ に注意して②を変形すると、

$\dfrac{U_{n,0}}{n!} = \dfrac{U_{n-1,0}}{(n-1)!} + \dfrac{(-1)^n}{n!}$

$\therefore P_{n,0} = P_{n-1,0} + \dfrac{(-1)^n}{n!}$ $(n \geqq 3)$.

数列$\{P_{n,0}\}$の階差数列が$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n!}\right\}$であることにより、$n \geqq 3$のとき、

$P_{n,0} = P_{2,0} + \sum_{k=3}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$

($P_{2,0} = \dfrac{U_{2,0}}{2} = \dfrac{1}{2!} = \dfrac{(-1)^2}{2!}$ なので)

$= \sum_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$

これは $n=2$ でも成立。

ここで、$\dfrac{(-1)^0}{0!} + \dfrac{(-1)^1}{1!} = 0$, $P_{1,0} = 0$ より、

$P_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$ $(n \geqq 1)$ …③

次に、$k = m$ $(1 \leqq m \leqq n)$ のときについて考える。

まず、n組中一致するm組を選ぶ場合の数は${}_nC_m$通り。残った$(n-m)$組は全て互いに異なるので、このような場合の数は、$U_{n-m,0}$通り。

したがって、

$U_{n,m} = {}_nC_m \cdot U_{n-m,0}$

両辺を $n!$ で割って、

$$\frac{U_{n,m}}{n!} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{(n-m)!m!} U_{n-m,0}$$

$$= \frac{1}{m!} \cdot \frac{U_{n-m,0}}{(n-m)!}$$

$$\therefore P_{n,m} = \frac{1}{m!} P_{n-m,0}$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!} \quad (\because ③) \quad \cdots ④$$

これは $n-m \geqq 1$、つまり $m \leqq n-1$ のとき成立。

ところで、$P_{n,n} = \frac{1}{n!}$ であるが、これは ④ に含まれる。

以上より、求める確率は、

$$P_{n,m} = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}$$

この極限について考える。

$$\lim_{n \to \infty} P_{n,m} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{m!} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!} \quad \cdots ⑤$$

ところで、マクローリン展開より、

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\therefore e^{-1} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

したがって、これを⑤に用いると、

$$\lim_{n \to \infty} P_{n,m} = \frac{1}{m!} \cdot e^{-1}$$

$$= \frac{1}{em!}$$