

[T君から君たちへの問題]

Q1.  $\frac{70}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{20}{100}$   
 雨 雨 晴れ 雨

(A)より、今日雨なら明日は70%雨  
30%晴れ

(A)より、明日も雨ならあさっても70%雨  
(B)より、明日は晴れならあさっては20%雨

$$= \frac{49+6}{100} = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$$

Q2. Q1よりあさってが雨の確率は $\frac{11}{20}$ 、晴れの確率は $\frac{9}{20}$

よって  $\frac{11}{20} \times \frac{70}{100} + \frac{9}{20} \times \frac{2}{10} = \frac{77+18}{200} = \frac{95}{200} = \frac{19}{40}$   
 晴れ→(A) 雨→(B)

Q3. Q1, Q2を解くと、n日後に雨が降る確率は

$$\frac{20}{100} \times (1 - \text{前日以後に雨が降る確率}) + \frac{70}{100} \times \text{前日以後に雨が降る確率}$$

であることに気が付く♪  
 → 前日が晴れだった時、次の日に雨が降る確率

前日が雨だった時、次の日に雨が降る確率

$a_n$ をn日後、 $a_{n-1}$ をn-1日後に雨が降る確率とする。

$$\begin{cases} a_1 = \frac{70}{100} \\ a_n = \frac{70}{100} a_{n-1} + \frac{1}{5} (1 - a_{n-1}) \\ = (\frac{7}{10} - \frac{1}{5}) a_{n-1} + \frac{1}{5} \\ = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{5} \end{cases}$$

特性方程式を用いて漸化式を解いてみる♪

$$d = \frac{1}{2}d + \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{2}d = \frac{1}{5}$$

$$d = \frac{2}{5}$$

$$a_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} (a_n - \frac{2}{5})$$

$$a_{n+1} - \frac{2}{5} = (a_1 - \frac{2}{5}) \times (\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$\frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$$

$$a_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \times (\frac{1}{2})^{n-1}$$

したがって、n日目に雨が降る確率は

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{10} \times (\frac{1}{2})^{n-1} \quad \text{となる} \quad \text{♪}$$